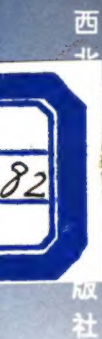


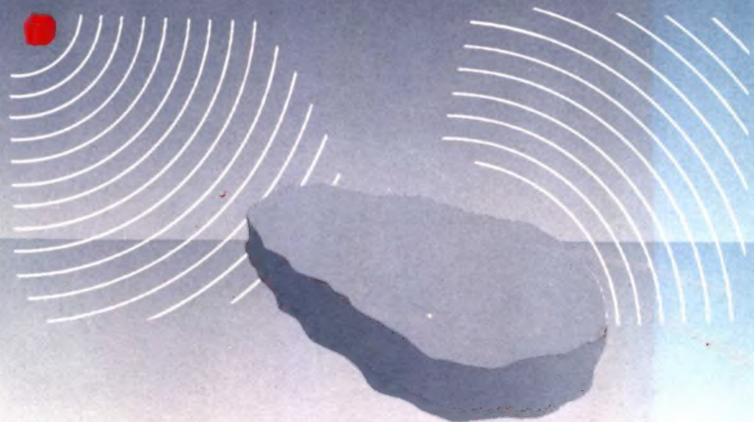
偏微分方程逆问题的数值方法及其应用

苏超伟 著





西北……版社







ISBN 7-5612-0811-1/O·111
定价：17.10 元

偏微分方程逆问题的数值方法及其应用

苏超伟　著

西 北 工 业 大 学 出 版 社
1995年10月　西安

（陕）新登字 009 号

【内容简介】 本书的目的是向读者介绍解决偏微分方程逆问题的一些数值方法。第一章介绍有关不适定问题和偏微分方程逆问题的概念及实例；第二章介绍不适定问题的正则化方法，算子逆问题的摄动方法，第一类 Fredholm 积分方程的数值方法以及病态线性方程组的求解方法；第三章详细介绍解决偏微分方程逆问题数值解的 PST 和 GPST 技术；第四章详细介绍解决偏微分方程逆问题数值解的最佳摄动量方法，逆问题的区域分裂算法和异步并行计算的处理技术；第五章介绍六个不同领域（声学、电磁学、无损探伤、分布式参数系统、翼型反设计和石油开采）中逆问题的处理方法和数值仿真。

本书可供从事科学和工程领域中逆问题数值分析和反设计方面的科研人员、高等院校的教师、研究生和高年级大学生阅读。

偏微分方程逆问题的数值方法及其应用
苏超伟 著
责任编辑 雷 鹏
责任校对 齐随印
*

（710072 西安市友谊西路 127 号 电话 4253407）
全国各地 新华书店 经销
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7－5612－0811－1/O・111
*
开本：850×1168 毫米 1/32 印张：7.0625 字数：166 千字
1995 年 10 月第 1 版 1995 年 10 月第 1 次印刷
印数：1—1 000 册 定价：17.10 元



该书由“西北工业大学‘505’专著出版基金”资助出版

来辉武教授简介

来辉武系505神功元气袋及系列保健产品发明者;美国纽约第14届世界发明家奖、法国巴黎第82届国际发明奖、泰国曼谷中国星火计划项目展示金奖、中国北京首届科技之光成果展金奖等60多项国际、国内奖获得者;全国劳动模范、中国"七五"星火计划优秀企业家称号获得者;陕西咸阳抗衰老研究所所长,中国咸阳保健品厂厂长兼书记,中国医学科学院西安分院中西医结合研究所所长、研究员,西北工业大学顾问教授,西北大学名誉教授,西安医科大学名誉教授,中国科学技术讲学团教授,陕西继续教育大学荣誉教授。



中国咸阳保健品厂厂长
西北工业大学顾问教授　来辉武

前　言

我们知道，在许多科学领域（如：物理学、力学、热传导学、声学、电磁学等）和工程技术中，有许多问题可以用偏微分方程描述。研究偏微分方程的数值解是解决这些问题的强有力工具。而偏微分方程的数值解的研究已成为一门专门的学科，国内外有很多学者在这个领域进行研究，并利用各种数值方法和最新的研究结果来解决各种工程实际问题。然而，自然界中的事物总存在着辩证关系。当偏微分方程中的算子、边界条件、初始条件，从过去的已知变成未知，而原方程的解仍然未知时，这就构成了偏微分方程的逆（反）问题。这些问题在工程技术中也是普遍存在的。例如，在无损探伤、地下目标重构（识别）、地震勘探、石油开采方面的强化采油和产量预测、飞机翼型设计、结构故障诊断、物质的热传导系数和比热系数的测定等方面，均存在偏微分方程的逆问题。逆问题的研究得到了国内外学者的广泛重视，近十年来，每年举行一次有关逆问题的国际性会议，并创立"Inverse Problems"杂志，这一研究方向无疑已成为各种学科和工程技术中的热门研究领域。

本书的主要目的是向读者介绍解决偏微分方程逆问题的两种数值方法以及在解决工程实际问题中的其它一些方法。通过介绍不同领域的工程实际中的逆问题，一方面，使读者了解到逆问题存在的广泛性，另一方面，使读者了解到解决这些问题的最新技术。

为了保证本书具有一定的系统性，本书第一章介绍了有关不适定问题和偏微分方程逆问题的概念及实例；第二章介绍了一些基础知识，如不适定问题的正则化方法、算子逆问题的摄动方法、第一类 Fredholm 积分方程的数值方法以及病态线性方程组的求解方法；第三章详细介绍了 Y. M. Chen 提出的 PST 和 GPST 技术，以及在解决一维、二维扩散方程，双曲方程中的具体处理方法和数值计算结果；第四章详细介绍了作者提出的最佳摄动量方法，以及利用解决正问题的区域分裂原理提出了逆问题的区域分裂计算技术和异步并行算法；第五章介绍六个不同领域(声学、电磁学、无损探伤、分布式参数系统、翼型反设计和石油开采)中逆问题的处理方法和数值仿真。但需要指出，因篇幅的限制，本书不可能包罗各种领域中出现的逆问题和它们的数值处理方法。

为了便于读者自学，在编写过程中，力求由浅入深，并且系统地叙述了有关方面的问题，尤其是着重阐述 GPST 和最佳摄动量方法的基本原理和处理过程。同时，在讨论逆问题的应用方面尽可能地不涉及各自专业方面的知识，把重点放在建模以后的数值处理方面。

作者在研究逆问题的数值方法中，得到了 Grumman 公司奖学金的资助。第四章中的许多研究结果是在该奖学金的资助下，在美国纽约州立大学石溪分校应用数学和统计系研究完成的。在此期间得到了 CEEC 基金委员会主席、国际著名的物理学家杨振宁教授，应用数学和统计系主任、国际著名的量分子力学和计算流体力学专家 James Glimm 教授，以及逆问题数值方法 GPST(或PST)的创始人Y. M. Chen 教授的大力支持和鼓励。在回国后的研究工作中，作者得到了国家教委回国人员基金和陕西省自然科学基金对“偏微分方程逆问题的异步并行方法之研究”项目的资助，作者在编写本书过程中，受到西北工业大学有关领导和应用数学系领导的支持，西北工业大学林世明教授和西北大学张棣教授，以

及同行的帮助和鼓励。另外，西北工业大学张学林讲师在作者整理本书初稿时曾给予了很大的帮助。作者在此一一深表谢忱。

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指教。

著　者

1994 年 11 月

目　录

第一章 绪 论

1.1 概 论

1. 什么是偏微分方程的逆问题

偏微分方程的逆(反)问题是因相对偏微分方程的正问题而提出来的。

众所周知,在物理学、力学和工程技术问题的研究中,发现许多问题可以用偏微分方程描述。由于它具有紧密地、直接地联系着许多自然现象的特点,所以随着科学技术的发展,它一方面从其它科学技术中吸取新方法,不断地丰富更新它的研究内容,另一方面,也促进了许多相关数学分支的发展,为解决许多实际问题提供了有力工具。

偏微分方程正问题(即:定解问题),是研究由偏微分方程描述某种物理过程或现象,并根据系统的状态变量的某些特定条件(包括初始条件、边界条件等)来确定整个系统的状态变量的变化规律,即研究状态的数学表达式。

例如:某一物体 G 的热传导问题,以函数 $u(x,y,z,t)$ 表示物体 G 在位置 (x,y,z) 处及时刻 t 的温度,物体的热传导系数、比热系数和密度系数分别为 $k(x,y,z)$、$c(x,y,z)$ 和 $\rho(x,y,z)$,外界对物体 G 的加热过程为 $f(x,y,z,t)$,则物体内部的温度函数 $u(x,y,z,t)$ 一定满足下列方程:

$$\frac{\partial \rho c u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f \quad (1.1)$$

并且，在初始时刻即 $t=0$ 时，物体的温度变化规律已知，如

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z) \quad (1.2)$$

物体与外界接触的表面温度变化规律已知，即

$$u(x,y,z,t)\big|_{(x,y,z)\in\Gamma}=g(x,y,z,t) \quad (1.3)$$

其中 Γ 为物体的边界曲面。

这样物体 G 的内部温度 $u(x,y,z,t)$ 的变化规律就被唯一地确定。

然而自然界中的变化规律总存在着一定的辩证关系。在上述热传导问题中，当人们研制出一种新物体时，它的热传导系数、比热和密度的系数特性，往往是未知的，而物体和外界接触表面上的各点流量(即$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}$)是可观察的，物体内部的温度变化仍然未知，这就要求人们去确定新物质的热传导系数 $k(x,y,z)$、比热系数 $c(x,y,z)$ 和密度系数 $\rho(x,y,z)$。这个问题恰是上述问题的反问题，即是一个偏微分方程的逆问题。

概括而言：若偏微分方程的定解问题中某些原来条件变成未知条件，而原方程的未知函数可能仍然是未知的，或者只知道与这个未知函数的一些有关信息，我们要通过方程，定解条件和某些附加条件来确定这些未知量，这类问题称为偏微分方程的逆问题。

在许多自然科学和工程技术领域中，确定这些待定量有着不同的途径。最明显、最直接的方法是测量这些参数在一些离散点处的值，并通过插值逼近方法可得待定量的变化规律。但这种方法一般是行不通的。其原因有：

(1) 直接测量所有的数据，费用巨大(如在资源勘探方面)；

(2) 直接测量是不可能的，例如，不可损坏的物体内部结构参数、高空、海底、地下、生物等物体内部的一些参数。

这就要求人们利用与待定参数有关的偏微分方程，去测量与

待定参数有一定关系的其它量在边界上的变化规律或者其它可获得的信息去估计所要求的未知量，这个过程就是求解偏微分方程逆问题的过程。

一般地，偏微分方程逆问题有五类：

(1) 确定偏微分方程的某些结构参数，即微分算子识别问题。例如上述问题中确定热传导系数 $k(x,y,z)$ 或比热系数 $c(x,y,z)$ 等。

(2) 确定过程的过去状态，即时间反演问题(或时间匹配问题)。例如，用上述问题中已知物体当前的温度去确定初始的温度分布，即 $\varphi(x,y,z)$。

(3) 确定外界过程的作用。例如，在上述问题中确定对物体的加热过程 $f(x,y,z,t)$。

(4) 确定状态变量在物体边界上的变化规律。例如，在上述问题中确定物体与外界接触表面上的温度变化规律，即 $g(x,y,z,t)$。

(5) 确定物体的边界形状，即几何逆问题。例如，在上述问题中确定 Γ 或 G 的形状。

2. 适定问题与不适定问题

虽然 Hadamard 的适定性概念是针对数学物理问题提出的，但是这个适定性概念很容易推广到一般方程的解问题。下面介绍一般性的适定性概念。

已知两个度量空间 U 和 F，元素间的距离分别为 $\rho_U(u_1,u_2)(u_1,u_2\in U)$，$\rho_F(z_1,z_2)(z_1,z_2\in F)$，并且对每个元素 $u\in U$ 在空间 F 中存在唯一解 $z=R(u)$ 与之对应。如果对任一个数 $\varepsilon>0$，都存在数 $\delta(\varepsilon)>0$，若有不等式

$$\rho_U(u_1,u_2)<\delta(\varepsilon) \tag{1.4}$$

就有

$$\rho_F(z_1,z_2)<\varepsilon \tag{1.5}$$

其中 $z_1 = R(u_1), z_2 = R(u_2)(u_1, u_2 \in U, z_1, z_2 \in F)$。则在F空间中由 $u \in U$ 确定的解 $z = R(u)$ 的问题被称为在空间对(F,U)上是稳定的。

由度量空间U的元素 u 来确定度量空间F上的解 z 的问题，如果满足下列条件，则称该问题在度量空间对(F,U)上是适定的。

(1)(存在性)对所有元素 $u \in U$ 均存在空间F的解 z；

(2)(唯一性)解 $z = R(u)$ 是唯一被确定；

(3)(稳定性)问题在空间对(F,U)上是稳定的。

不满足上述三个条件之一的问题统称为不适定问题。

长期以来，人们都认为，从实际物体问题归结出的数学问题总是适定的。这一观念把人们的注意力牢固地局限于适定性的一类问题之中，并且人们认为实际问题都一定是适定的，因而研究不适定问题也就没有任何意义。直到本世纪50年代中，才开始引起人们的重视。特别是80年代以来，由于遥感、资源勘探、大气测量、系统参数识别、生物器官和人体器官特性的分析、无损探伤等等，各类自然科学与工程技术的迅速发展，把对不适定问题的研究和应用提到了崭新的阶段。

在不适定问题中，人们一般关心的是不满足稳定性条件的一类不适定问题。因此，粗略地讲凡是解不连续地依赖于数据的一切数学问题都称为不适定问题。对不适定问题的研究，前苏联学者Tikhonov和Arsenin从观念、理论、方法上开拓了一个新的领域。他们的专著《不适定问题的解法》是这一领域中第一部著名的著作。美国纽约大学Courant数学研究所的John教授将这部著作译成英文时，在序言中写道："可以一言以蔽之：大多数应用问题是而且总是不适定的，特别是当它们要求数值解时。"

对于偏微分方程逆问题，不管它的正问题是否线性，它的逆问题总是非线性的，并且是不适定的。因此这里给出不适定的概念和以下列出的不适定问题的例子是非常必要的。

3. 不适定问题的几个实例

例 1 病态线性方程组的数值解。

我们知道，当线性方程组 $Ax=B$ 的条件数 $\mathrm{cond}(A)>10^5$ 时，线性方程组的数值解不连续依赖于 A 和 B，即该类问题是不适定的。

例 2 第一类 Fredholm 积分方程的解

$$\int_a^b K(x,t)z(t)\mathrm{d}t=u(x),\quad c\leqslant x\leqslant d \tag{1.6}$$

其中 $K(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 内连续，且具有连续偏导数 $\frac{\partial K}{\partial x}$；$z(t)$ 为空间 F 中的未知函数，$u(x)$ 为空间 U 中的给定函数，空间 U 和 F 中的距离分别为

$$\rho_{\mathrm{U}}(u_1,u_2)=\sqrt{\int_c^d[u_1(x)-u_2(x)]^2\mathrm{d}x} \tag{1.7}$$

$$\rho_{\mathrm{F}}(z_1,z_2)=\max_{t\in[a,b]}|z_1(t)-z_2(t)| \tag{1.8}$$

当积分方程右端为 $u=u_1(x)$ 时，方程的解为 $z_1(t)$，即

$$\int_a^b K(x,t)z_1(t)\mathrm{d}t=u_1(x),\quad c\leqslant x\leqslant d \tag{1.9}$$

不难验证，对一切实数 ω 和 N，函数 $z_2(t)=z_1(t)+N\sin\omega t$ 是右端为 $u_2(x)=u_1(x)+N\int_c^b K(x,t)\sin\omega t\mathrm{d}t$ 的积分方程的解。

很显然，对任一实数值 N，当 ω 充分大时

$$\rho_{\mathrm{U}}(u_1,u_2)=|N|\sqrt{\int_c^d\left[\int_a^b K(x,t)\sin\omega t\mathrm{d}t\right]^2\mathrm{d}x} \tag{1.10}$$

可以任意小，但是，$z_1(t)$ 与 $z_2(t)$ 之间的距离

$$\rho_{\mathrm{F}}(z_1,z_2)=\max_{t\in[a,b]}|N\sin\omega t|=|N| \tag{1.11}$$

则不可能任意小。

这就说明第一类 Fredholm 积分方程的解 $z(t)$ 是不连续依赖

于右端已知项 $u(t)$。

例 3 当系数以 l_2 度量为近似已知时，求 Fourier 级数之和。

l_2 空间与 Fourier 级数的和函数空间 F 之间的对应关系为

$$f_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt = R(a),$$

$$a = (a_1, a_2, a_3, \cdots) \in l_2 \tag{1.12}$$

取一个 l_2 中的元素 b 为

$$b_n = \begin{cases} a_0, & n = 0 \\ a_n + \dfrac{\varepsilon}{n}, & n > 1 \end{cases} \quad (\varepsilon > 0) \tag{1.13}$$

则

$$f_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos nt \tag{1.14}$$

不难验证 $f_2 \in$ F。

$$\| a - b \|_{l_2} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n)^2} = \varepsilon \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \tag{1.15}$$

$$\| f_2(t) - f_1(t) \|_F = \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} | f_2(t) - f_1(t) |$$

$$= \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} \varepsilon \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n} \right| = \infty \tag{1.16}$$

因此在上述距离的定义下，求 Fourier 级数和的问题是不适定的。

例 4 二维 Laplace 方程的 Cauchy 问题。

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in R^2 \\ u(x,0) = f(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{1.17}$$

其中 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 为给定函数。

若 $f_1(x) \equiv 0, \varphi_1(x) = \dfrac{\sin ax}{a} (a > 0)$，则 Cauchy 问题的解为

$$u_1(x) = \frac{1}{a^2}\sin ax \operatorname{sh} ay \tag{1.18}$$

若 $f_2(x) \equiv 0, \varphi_2(x) \equiv 0$,则 Cauchy 问题的解为

$$u_2(x) \equiv 0 \tag{1.19}$$

如果 $f(x), \varphi(x)$ 在给定函数空间上的度量是以最大值度量估计,则有

$$\rho(f_1, f_2) = \sup_x |f_1(x) - f_2(x)| = 0 \tag{1.20}$$

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \frac{1}{a} \tag{1.21}$$

显然,当 a 充分大时,$\rho(f_1, f_2)$ 和 $\rho(\varphi_1, \varphi_2)$ 都可充分小,但 Cauchy 问题的解之差

$$\begin{aligned}\rho(u_1, u_2) &= \sup_x |u_1(x, y) - u_2(x, y)| \\ &= \sup_x \left| \frac{1}{a^2}\sin ax \operatorname{sh} ay \right| = \frac{\operatorname{sh} ay}{a^2}\end{aligned} \tag{1.22}$$

则对任意固定的 y,当 a 充分大时,$\rho(u_1, u_2)$ 可以任意大。

因此,这个问题不具有稳定的特性,因而是不适定的。

4. 研究偏微分方程逆问题的几个方面

(1) 理论上要解决逆问题的存在性和唯一性。

这方面的研究具有很大的难度,目前,仅能解决一些特殊类型的偏微分方程逆问题的存在性和唯一性。Sylvester,Uhlmann 和 Sun 对二维椭圆算子 $L[k] = \nabla \cdot k\nabla$ 中关于 $k(x, y)$ 的存在性和唯一性做了一系列的工作;Cannon 和 Duchateau 对一维非线性扩散方程中扩散系数的逆问题的存在性和唯一性也做了大量研究工作,给出了许多有益的结论。关于理论方面的研究,有学者认为应当避开逆问题存在性和唯一性的讨论,其原因有:① 由于实际问题的数据严格地说都有一定的误差,并且逆问题本身是一种不适定的问题(即解不连续依赖于数据)。因此按照经典的理解,解与“真解”相差很大,故讨论逆问题的存在性和唯一性在实际中意义

不大。② 从实际问题角度看,反映自然现象的解肯定是存在的,关键是如何求出逆问题的近似解。

(2) 研究逆问题的求解方法。即将不同类型的逆问题通过适当的运算和变换转化成可计算的模型,如方程、级数和非线性最优化问题。在转化计算的模式时,必须考虑到原始问题的不适定性,从而要求构成的计算模式必须具有稳定的特点。在一般的逆问题的数值方法中,比较有效的方法有:非线性最优化方法、脉冲谱技术(PST)或广义脉冲谱技术(GPST)、最佳摄动量法。人们很容易将偏微分方程逆问题转化成非线性最优化问题,对不同的偏微分方程逆问题有许多学者利用各种非线性最优化求解逆问题。Y. M. Chen 与他的课题组人员在近 20 年的时间内应用 PST 或 GPST 方法先后讨论了许多类型的偏微分方程逆问题。广义脉冲谱技术是一种数值迭代方法。计算结果表明对离散后的待定未知量较少(< 100)的情况,迭代收敛速度比最优化方法要快得多。最佳摄动量法是一种将非线性最优化方法和广义脉冲谱技术各自优点有机地相结合而构成的一种数值迭代方法。本书作者将这种方法应用到求解许多类型的逆问题之中,并且成功地将最佳摄动量法和 Schwarz 区域分裂方法相结合应用于二维扩散方程的时不变扩散系数的重构问题中。这为解决工程实际中的逆问题提供了一个很好的途径。

(3) 研究所提出的计算方法的可行性和收敛性。

到目前为止,不论是非线性最优化方法还是广义脉冲谱技术、最佳摄动量法,它们只能求出在初始猜测值附近的最优值,即只能得到局部极值解。一般说来,要证明解决逆问题的非线性最优化方法的收敛性是很困难的。并且,对于优化的未知数量越多,收敛速度越慢,计算量就越大。而广义脉冲谱技术和最佳摄动量法从数值结果来看,收敛速度要比最优化方法快,但要证明它们的迭代算法是否收敛还存在许多困难。Liu 和 Chen 对一维时域扩散方程的逆

问题的广义脉冲谱技术迭代方法给出了收敛性证明和收敛速度的估计式。然而最佳摄动量法的收敛性和它的区域分裂算法的收敛性仍没有得到解决。另一个重要的问题是关于正则化因子的如何选择问题。我们知道，正则化因子选择是否合适决定了计算的收敛速度和迭代算法能否收敛。至今，这个问题还没有真正解决。在实际计算过程中，往往是根据一定的计算经验选择一个正则化因子。然后，根据计算结果来修改正则化因子，直至选到一个较为合适的正则化因子。

1.2 逆问题的实例

本节将给出一些逆问题的实例，它们是选自不同领域的实际问题。为了突出这些问题在数学上的共性，在此不过多地涉及问题的专业知识内容。

例 1 二维地下热源强度的确定问题。

元素的放射性衰变引起地壳温度的升高，其温度分布满足下列热传导方程：

$$a^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \varphi(t) f(x,y), \quad 0 \leqslant y < \infty \tag{1.23}$$

其中 a 为常数，Δ 为 Laplace 算子，$\varphi(t)$ 为已知函数，且具有下列形式：

$$\varphi(t) = \alpha e^{-\lambda t} \tag{1.24}$$

其中 λ 是放射性元素的半衰期，α 为已知的常数，$f(x,y)$ 为热源强度，这是一个半平面上的热传导方程（见图 1.1），它的定解问题为

初始条件： $$u(x,y,0) = 0 \tag{1.25}$$

边界条件： $$u(x,0,t) = h(x,t) \tag{1.26}$$

当 $f(x,y)$ 为已知时，式(1.23) ～ (1.26) 构成了确定温度分布 $u(x,y,t)$ 的定解问题（正问题）。当 $f(x,y)$ 是未知时，必须给定

某些附加条件，才能确定温度分布 $u(x,y,t)$ 和热源强度 $f(x,y)$。例如下列两种不同的附加条件：

$$u(x,y_1,t)=\zeta(x,t) \tag{1.27a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,0,t)=\eta(x,t) \tag{1.27b}$$

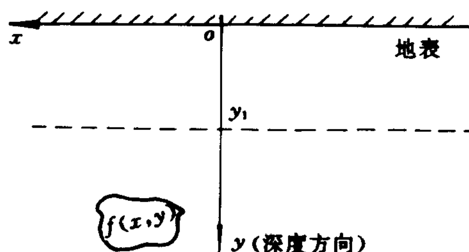


图 1.1 二维地下热源强度确定问题示意图

第一种附加条件要求测量 y_1 处温度，而第二种附加条件表明地表的温度沿深度方向的变化率是已知。这时，由式(1.23)～(1.27)便构成了确定地下热源的逆问题。

例 2 地球物理勘探问题。

地震勘探是目前广为利用的一种资源勘探方法。它由地震源产生一组地震波通过接收装置测得传播波与反射回波，波的传播服从弹性波方程，其波速是未知的待求量，而已知量是位移向量与它的法线速度在地表面处的值(测量得到)，波速的获得将揭示地层的结构。

在二维模型之下(见图 1.2)：设地震波引导起的质点位移有水平位移，记为 $u(x,z,t)$ 及垂直位移，记为 $w(x,z,t)$。它们所对应的标量位函数为 $\varphi(x,z,t)$，它们之间满足下列关系：

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.28}$$

由弹性力学知识可知，标量位满足

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2(x,z)\Delta\varphi + G(x,z,t) \tag{1.29}$$

其中 a 为波速，$G(x,z,t)$ 震源项是已知的。在通常情况下 G 为 δ 函数，即 $G(x,z,t) = \delta(x - x_0, z - z_0, t)$，并可设为 $(x_0,z_0) = (0,0)$。

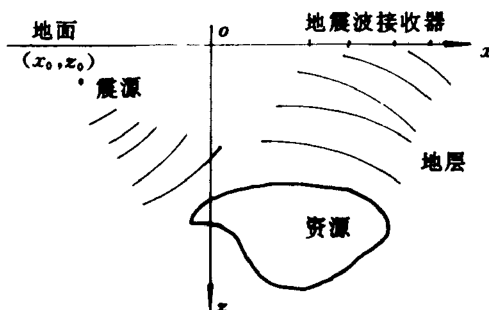


图 1.2 二维地震波传播示意图

式(1.29) 的定解问题为

初始条件： $\varphi(x,z,t)\big|_{t=0} = 0$

边界条件： 在地表(自由表面) 的法向引力为零，由 Hooke 定律知

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0} = \lambda\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)\bigg|_{z=0} = 0 \tag{1.30}$$

其中 λ 为弹性系数。由于震源点为点源，故除去此点以外 $G \equiv 0$，从而由式(1.29) 可得边界条件为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\bigg|_{z=0} = 0 \tag{1.31}$$

若 $a(x,z)$ 已知时，则式(1.28) ~ (1.31) 构成一个波动方程的定解问题。若 $a(x,z)$ 未知，而 $\varphi(x,z,t)$ 仍然未知，则为了确定 $a(x,z)$，还必须提供一个附加条件。这一条件可由在地表上的地

震波接收器(检波器)测量提供。在地表上,质点振动的法向速度是可以测量的。这时有

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{z=0}=F(x,t) \tag{1.32a}$$

或

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\partial z}\right|_{z=0}=F(x,t) \tag{1.32b}$$

从而由式(1.28)～(1.32)构成了地震勘探中的反演问题。

例3　石油与地下水资源的估计问题。

在石油与地下水资源开发研究中,人们十分关心透射率 α 与存贮系数 β,这时控制方程为如下扩散方程:

$$\beta\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\sum_{i=1}^{m}q_i,\quad (x,y,z)\in\Omega \tag{1.33}$$

其中 u 表示压力,q_i 为源强度,α 为透射率,β 为存贮系数。示意图见图1.3。

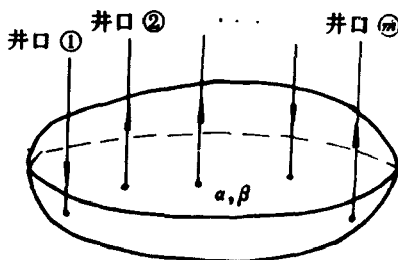


图1.3　资源开发与估计中的示意图

初始条件:

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\quad (x,y,x)\in\Omega \tag{1.34}$$

边界条件：
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0 \tag{1.35}$$

其逆问题是由某些观测点，即井口$(x_j,y_j,z_j)(j=1,2,\cdots,m)$，测得该点处的压力$u_j$和$q_i$数值来推算透射率$\alpha$与存贮系数$\beta$。

例4 定向设计问题。

定向设计问题经常出现于电器、机械、力学等领域中。它通常是根据给定的设计要求确定参数。现以非均匀传输线为例说明，示意图见图1.4

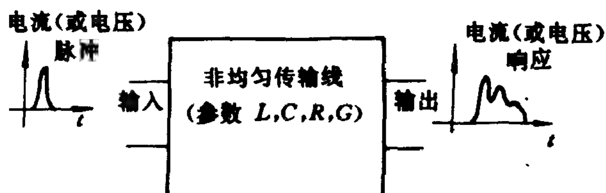


图1.4 非均匀传输线定向设计问题示意图

非均匀传输线满足如下的控制方程：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - L(x,t)C(x,t)\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}\\ &= L(x,t)G(x,t) + R(x,t)C(x,t)\frac{\partial i}{\partial t}\\ &\quad + R(x,t)G(x,t)i(x,t)\end{aligned} \tag{1.36}$$

式中$i(x,t)$为电流，L、C、R、G分别为单位长度的电感、电容、电阻、电导，已知量是输入与输出的电流(或电压)，未知量是L、C、R、G。这是一个典型的工程定向设计问题。

当L、C、R、G已知时，只要给出输入条件便可得到输出。在逆问题中，给出输入与输出，要求推算出L、C、R、G。

例5 海水密度的推算问题。

在海洋动力学中，海水密度是人们非常关注的参数。直接潜入海中进行测量是十分困难的，而现代遥测技术却提供了一种简单、

可靠的方法。在海面，人们发射声脉冲，其声波通过海水传到海底坚硬的岩石海床，经过海床的反射而返回海面，再通过声波检测器接收其波信号，这样便可分析推算出海水密度。一维示意图见图1.5。

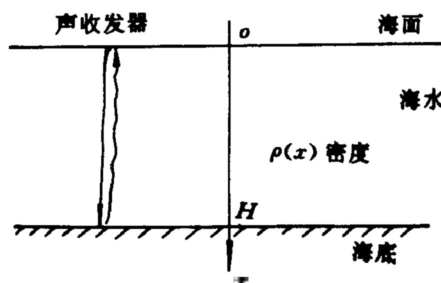


图 1.5 一维海水密度确定问题示意图

假定海洋模型为可压无粘层状流体，其声波在海水中的传波满足下列方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (0 < x < H, \quad t > 0) \tag{1.37}$$

其中 $p(x,t)$ 为压力，$u(x,t)$ 为海水的粒子速度，$\rho(x)$ 为海水密度，$c(\rho)$ 为绝对声速，ρ 与 c 之间有如下关系：

$$c = \sqrt{\rho k} \tag{1.38}$$

其中 k 为已知的海水可压系数，且为常数。

初始条件： $u(x,0) = 0, \quad p(x,0) = 0$ (1.39)

边界条件： $u(H,t) = 0, \quad p(0,t) = f(t)$ (1.40)

其中 $f(t)$ 为声脉冲函数。

由方程式(1.37)及初边值条件(1.39)、(1.40)构成了偏微分方程组的正问题。若 $\rho(x)$ 未知，则还必须附加一个条件才能确定

$p(x,t)$、$u(x,t)$ 和 $\rho(x)$。对于这一模型的附加条件可提为

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi(t) \tag{1.41}$$

这条件意味着在海面上需要记录下压力梯度随时间的变化情况，此量可通过在海面上的声波检测器测量得到。

例 6 动脉硬化位置的确定问题。

血液在动脉内流动可简化成一维的流体模型(见图 1.6)

$$\rho D \frac{\partial^2 p_e}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_e}{\partial x^2} \tag{1.42}$$

其中 ρ 为血液密度，一般可设为常数。p_e 表示由于心脏压缩而产生的过压力，即 $p_e = p - p_0$。p_0 为静压力，D 为膨胀率(即单位过压而引起的血管横断面面积的相对增加量 $D = A^{-1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p_e}$，$A$ 为血管横断面面积)。已知 p_e 在三个不同点随时间 t 的变化规律。正常情况下，它为常数值。当在某一点处发生硬化时，膨胀率就发生变化，从而根据 $D(x)$ 在三个点之间的变化情况，推断出动脉硬化的位置。

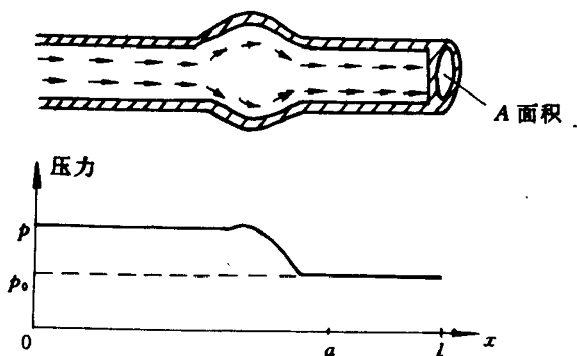


图 1.6 动脉硬化位置的确定问题示意图

这时逆问题的提法为：以上述血液流体控制方程式(1.42)和下列边界条件、初始条件和附加条件来确定 $D(x)$。

初始条件：　$$p_e(0,t) = f(t),\quad p_e(l,t) = g(t) \tag{1.43}$$

边界条件：　$$p_e(x,0),\frac{\mathrm{d}p_e(x,0)}{\mathrm{d}t}\text{为已知函数} \tag{1.44}$$

附加条件：　$$p_e(a,t) = h(t) \tag{1.45}$$

例 7　外形设计中的逆问题。

在航空发动机的压气机和涡轮的研究设计中，跨音速叶型型线的设计是一项极其重要的工作。从气动观点来看，自然合理的叶栅设计应当是根据给定的流体速度在叶型上按坐标的分布情况来确定其叶栅的形状。由于叶栅的型线正是流场的边界，该流场满足流体力学方程组，因而该问题属于确定偏微分方程的边界逆问题，即所谓的几何反问题。

平面叶栅无粘性常比热完全气体的相对定常等能等熵流动的流体满足下列流体力学方程组：

连续方程：　$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \tag{1.46}$$

无旋方程：　$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1.47}$$

能量方程：　$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}a_*^2 \tag{1.48}$$

过程方程：　$$\frac{\sqrt[\gamma]{p}}{\rho} = \text{常数} \tag{1.49}$$

其中 a_* 为临界音速，$q = (u,v)$ 表示为流体在点 (x,y) 处的流速，p 为流体压力，ρ 为流体密度，γ 为已知常数。示意图见图 1.7。

确定叶栅形状的条件有：

(1) 在进气口 $(x = 0)$ 上给定滞止压力 p_0，进气角 β_1。

(2) 在叶片吸力面 $\widehat{3's4'}$ 上给定流线条件 $\psi_{\widehat{3's4'}} = 0$ 及速度分布 $q_{\widehat{3's4'}} = w_s(x)$。应当注意到，吸力面 $\widehat{3's4'}$ 的几何位置是未知的。

(3) 给定叶片的厚度分布，即已知

$$\delta = \delta(x), \quad L_1 \leqslant x \leqslant L_2 \tag{1.50}$$

(4) 在叶片吸力面$\widehat{5p6}$上给定流线条件及流量条件

$$\psi_{\widehat{5p6}} = G \tag{1.51}$$

其中G为通过叶栅的总流量。

(5) 在出气口($x = L_3$)上已知出气角β_2。

(6) 周期性条件在$1'3'31$及$422'4'$区域中满足

$$q(x,y+t) = q(x,y) \tag{1.52}$$

$$\psi(x,y+t) = \psi(x,y) + G \tag{1.53}$$

其中t为平面叶栅的栅距。

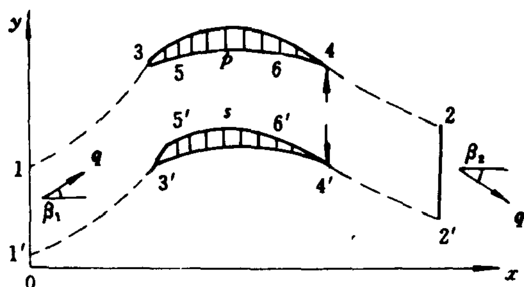


图 1.7 问题的求解区域

例 8 结构故障诊断问题。

参数识别是结构动力学中的一个重要研究课题，它利用结构的试验数据或机器的在线测量信号来确定已知模型的某些参数，通过对某些结构参数的识别达到故障诊断的目的。

例如，为了防止飞机发动机轴因磨损而发生疲劳或断裂，需要对其主轴的刚度进行不断地测量。但是直接测量主轴的刚度，特别是在发动机工作时，是不容易或不可能测到的。为此人们引入与刚

度有关的振动偏微分方程，并利用测量振动的某些响应达到推算刚度的目的。

考虑一无阻尼，某一端固定，另一端固定在运动规律为 $f(t)$ 的刚体上，轴承的振动属于一维梁的振动模型，其横向振动满足下列 Euler—Bernoulli 方程(见图 1.8)：

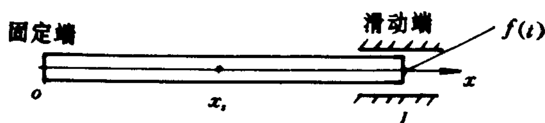


图 1.8　轴承故障诊断的振动模型示意图

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0 \leqslant x \leqslant l,\quad t > 0 \tag{1.54}$$

初始条件：

$$u(x,0) = 0,\quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0 \tag{1.55}$$

边界条件：

$$u(0,t) = 0,\quad \frac{\partial}{\partial x}u(0,t) = 0 \tag{1.56a}$$

$$u(l,t) = f(t),\quad \frac{\partial}{\partial x}u(l,t) = 0 \tag{1.56b}$$

其中 $k(x) = E(x)I(x)$，$E(x)$ 为弹性模量，$I(x)$ 是 x 处截面关于轴的二次距，$m(x)$ 为轴的质量分布函数。

边界条件(1.56a)为固定支点，边界条件(1.56b)为滑动支点。为了识别结构参数 $k(x)$，须增加一个附加条件(测量数据)。例如这个附加条件为

$$u(x_s,t) = g(t) \tag{1.57}$$

其中 x_s 为测量点的坐标。

例 9　传热系数与比热系数的测定。

在传热学中，测定新型非均匀材料的传热系数与比热系数是一项非常重要的工作，一维热传导方程为

$$\rho(x)c(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{1.58}$$

其中 $u(x,t)$ 为温度分布，$k(x)$ 为传热系数，$c(x)$ 为比热系数，$\rho(x)$ 为密度系数。这三个量中 $\rho(x)$ 通常是已知的。

热传导方程所要满足的定解条件为

初始条件： $u(x,0)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1$ (1.59)

边界条件： $u(0,t)=U_0(t),\quad u(1,t)=U_1(t)$ (1.60)

为了确定 $k(x)$ 与 $c(x)$，我们可以引入附加条件

$$k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=q_0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=1}=0 \tag{1.61}$$

第一个附加条件，意味着由一个端点 $x=0$ 流入的热量 q_0 为已知，第二个附加条件意味着另一个端点 $x=1$ 处无热交换。

第二章 基础知识

2.1 不适定问题的正则化方法

2.1.1 正则化方法的概念

对于算子方程

$$Az = u \tag{2.1}$$

其中 z、u 分别属于 F、U 度量空间。

如果算子 A 是正则的，即 A 有有界的连续的逆算子 A^{-1}，则方程有唯一解

$$z = A^{-1}u \tag{2.2}$$

但在实际中，非正则的算子更常见。例如，在偏微分方程中的逆(反)问题，我们主要遇到的就是这样的算子。Tikhonov 提出的正则化方法为解决这类非正则算子的求逆问题提供了有效途径。

我们知道，对于偏微分算子方程 $Az = u$，通常都是在某个适当的 Banach 空间(或 Hilbert 空间或 Sobolev 空间)H 中求其弱解 z 的。而求弱解往往可以归结为求某个泛函 $\Omega(z)$ 的极值(譬如说最小值)点 z，即成为一个变分问题：求 $\hat{z} \in$ H，使得

$$\min_{z\in H}\Omega(z) = \Omega(\hat{z}) \tag{2.3}$$

这样求得的 $\hat{z}$，我们可以把它看成是某个算子 R 作用于已知右端 u

的结果。对于已知依赖关系:$\hat{z} = R(u)$,我们希望它是正则的。但是,由于不适定性,这一点一般不能保证,从而 $\hat{z} = R(u)$ 也不能作为算子方程 $Az = u$ 的近似解。为克服这些缺陷,必须附加一些条件,才能使得算子 R 是正则的。这种求算子方程 $Az = u$ 的方法就称为正则化方法。至于具体的正则化的办法则是多样的,我们这里主要就一种被称为是变分法的方法加以介绍。

以下总是假定 F、U 为度量空间,算子 A:F → U,$Az = u$ 有逆算子 A^{-1},但其在 AF 上不连续(从而不稳定),并且可能解集 F 也不是紧集。因此,尽管 $u_\delta \in$ U 与精确的右端 u_T 偏差不大于 δ,即

$$\rho_U(u_\delta, u_T) \leqslant \delta \tag{2.4}$$

但是

$$\rho_F(z_\delta, z_T) = \rho_F(A^{-1}u_\delta, A^{-1}u_T) \tag{2.5}$$

却不一定很小,这与它作为近似解的意义是相悖的。

借助于与参数 δ 有关的算子 $R(u,\delta)$ 来确定 z_δ,使此参数按原始元素 u_δ 来确定,且应当 $\delta \to 0$(即 $u_\delta \to u_T$ 或 $\rho_U(u_\delta, u_T) \to 0$)时,$z_\delta \to z_T$,即 $\rho_F(z_\delta, z_T) \to 0$。为此给出以下定义:

定义 1 若算子 $R(u,\delta)$:U → F 具有下述性质,则称 $R(u,\delta)$ 在 $u = u_T$ 的 δ 邻域中对于方程 $Az = u$ 是正则算子。

(1) 存在 $\delta_1 > 0$,使得 $R(u,\delta)$ 在 u_T 含于 U 内的每一个 δ:$0 \leqslant \delta \leqslant \delta_1$ 邻域内都有定义。

(2) $\forall\ \varepsilon > 0$,存在 $0 \leqslant \delta_0 = \delta_0(\varepsilon, u_T) \leqslant \delta_1$,使得 $\rho_U(u_\delta, u_T) \leqslant \delta \leqslant \delta_0$,蕴涵 $\rho_F(z_\delta, z_T) \leqslant \varepsilon$,其中 $z_\delta = R(u_\delta, \delta)$。

注 在此定义中未假定 $R(u,\delta)$ 是单值的。用 z_δ 表示集 $\{R(u,\delta)\}$ 中的任意一个元素。

定义 2 若依赖于参数 α 的算子 $R(u,\alpha)$ 具有下述性质,则称 $R(u,\alpha)$ 为在 $u = u_T$ 的邻域中对于算子方程 $Az = u$ 是正则的算子。

(1) 存在 $\delta_1 > 0$,对于 $\forall\ \alpha > 0$ 使 $R(u,\alpha)$ 在 u_T 的含于 U 内的

任意的 $\delta:0\leqslant\delta\leqslant\delta_1$ 邻域内都有定义。

(2) 存在关于 δ 的函数 $\alpha=\alpha(\delta)$，对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)\leqslant\delta$ 使 $\rho_{\mathrm{U}}(u_\delta,u_T)\leqslant\delta(\varepsilon)$，$(u_\delta\in\mathrm{U})$ 蕴涵 $\rho_{\mathrm{F}}(z_\alpha,z_T)\leqslant\varepsilon$，其中 $z_\alpha=R(u_\delta,\alpha(\delta))$。

注　显然，定义 2 包含了定义 1。

按定义，若 $\rho_{\mathrm{U}}(u_\delta,u_T)\leqslant\delta$，则可以取 $z_\alpha=R(u_\delta,\alpha)$ 作为具有近似右端 u_δ 的方程 $Az=u_\delta$ 的近似解，元素 z_α 是由正则算子 $R(u,\alpha)$ 得到的，式中 $\alpha=\alpha(\delta,u_\delta)$ 由原始元素 u_δ 及其误差确定。这个解称之为方程 $Az=u$ 的正则解，数值参数 α 被称为正则参数。

由正则算子得到近以解的方法称为正则化方法。

由于正则化参数 α 的选法不同，这样得到的正则算子 $R(u,\alpha)$ 会有很多。其中那些关于 u 是连续的算子 $\overline{R}(u,\alpha)$ 必是方程 $Az=u$ 的正则算子，即

定理 1　令 $A:\mathrm{F}\rightarrow\mathrm{U}$，$\overline{R}(u,\alpha)$ 是对 U 当中所有的元素 u 和任意的 $\alpha>0$ 都有定义的，关于 u 连续的 U 到 F 的算子。若对任意的 $z\in\mathrm{F}$，有

$$\lim_{\alpha\to0}\overline{R}(Az,\alpha)=z \tag{2.6}$$

则算子 $\overline{R}(u,\alpha)$ 就是方程 $Az=u$ 的正则算子。

证明　此处只要说明算子 $\overline{R}(u,\alpha)$ 具有定义 2 的性质即可。

设 z_T 与 u_T 是 F 和 U 中的两个固定元素，$z_T\in\mathrm{F}$，$u_T\in\mathrm{U}$，$Az_T=u_T$，δ 是固定的正数。对任何一个元素 $u_\delta\in\mathrm{U}$，使

$$\rho_{\mathrm{U}}(u_\delta,u_T)\leqslant\delta \tag{2.7}$$

就有

$$\rho_{\mathrm{F}}(\overline{R}(u_\delta,\alpha),z_T)\leqslant\rho_{\mathrm{F}}(\overline{R}(u_\delta,\alpha),\overline{R}(u_T,\alpha))+\rho_{\mathrm{F}}(\overline{R}(u_\delta,\alpha),z_T) \tag{2.8}$$

因为算子 $\overline{R}(u,\alpha)$ 对 u 在元素 u_T 处是连续的，则对充分小的 $\delta>0(\delta\leqslant\delta_1)$ 可以由不等式

$$\rho_U(u_\delta, u_T) \leqslant \delta \tag{2.9}$$

得出不等式

$$\rho_F(\overline{R}(u_\delta, \alpha), \overline{R}(u_T, \alpha)) \leqslant \omega(\delta) \tag{2.10}$$

式中，当 $\delta \to 0$ 时 $\omega(\delta) \to 0$。

因为

$$\lim_{\alpha \to 0} \overline{R}(Az_T, \alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \overline{R}(u_T, \alpha) = z_T \tag{2.11}$$

故对所有的 $\delta > 0$ 均存在这样的 $\alpha = \alpha_1(\delta, z_T)$，使得当 $\alpha \leqslant \alpha_1$ 时，有

$$\rho_F(\overline{R}(u_T, \alpha), z_T) \leqslant \omega(\delta) \tag{2.12}$$

由不等式(2.8)、(2.10)和(2.12)可得出，对 $\forall\ \delta \leqslant \delta_1$ 和 $\alpha \leqslant \alpha_1$ 都成立不等式

$$\rho_F(\overline{R}(u_\delta, \alpha), z_T) \leqslant 2\omega(\delta) \tag{2.13}$$

因为 $\delta \to 0$ 时 $\omega(\delta) \to 0$，所以对一切 $\varepsilon > 0$，可以指出这样的 $\delta(\varepsilon)$，使对 $\delta \leqslant \delta(\varepsilon) \leqslant \delta_1$ 与 $\alpha = \alpha_a(\delta, z_T)$，可以由不等式(2.9)与(2.13)得出不等式

$$\rho_F(\overline{R}(u_\delta, \alpha), z_T) \leqslant \varepsilon \tag{2.14}$$

定理得证。

注　若 R 对 u 连续，则当 α 与 δ 相符时，它们就决定了求近似解的稳定方法。

2.1.2　正则算子的构成

设方程 $Az = u_T$ 有唯一解 z_T，A:F → U。

记 $Q_\delta = \{z \in F \mid \rho_U(Az, u_\delta) \leqslant \delta, \rho_U(u_\delta, u_z) \leqslant \delta\}$，那么 $Az = u_\delta$ 的近似解应在 Q_δ 之内。我们把 Q_δ 称之为方程 $Az = u_\delta$ 的可能解集。由于问题的不适定性，即方程的解 z_δ 对 δ 的不连续性，我们不能把 Q_δ 中的任意一个元素 z_δ 作为方程 $Az = u_T$ 的近似解。我们必须设法选出 Q_δ 中的那些连续依赖于 δ 的元素作为近似解。为此引

入稳定泛函的概念。

定义 3 把满足下列三个条件的非负连续泛函 $\Omega(z)$ 称为稳定泛函：

(1) $\Omega(z)$ 定义于 F 中稠密子集 F_1 上；

(2) $z_T \in F_1$；

(3) $\forall d > 0$，集$\{z \in F_1 | \Omega(z) \leqslant d\}$ 在 F_1 中紧。

置 $F_{1,\delta} = Q_\delta \cap F_1$，于是 $\Omega(z)$ 在 $F_{1,\delta}$ 上有定义。我们在该集中寻求使泛函 $\Omega(z)$ 极小化的这种(些)元素。设 z_δ 为这种元素，可以把它看成某个与 δ 有关的算子 $\overline{R}$ 作用于方程式 $Az = u_\delta$ 的结果。即 $z_\delta = \overline{R}(u_\delta, \delta)$。对于算子 $\overline{R}$ 有下列结论：

定理 2 算子 $\overline{R}(u,\delta)$ 是 $Az = u$ 的正则算子，因而可以取元素 $z_\delta = \overline{R}(u_\delta,\delta)$ 作为 $Az = u_\delta$ 的近似解。

证明 分两步(1) 证明算子 $\overline{R}(u,\delta)$ 对所有的 $\delta > 0$ 和满足

$$\rho_U(u_\delta, u_T) \leqslant \delta \tag{2.15}$$

的 u_δ 都有定义。

因为 $\Omega(z)$ 是非负泛函，故存在它的下确界

$$\inf_{z \in F_{1,\delta}} \Omega(z) = \Omega_0 \tag{2.16}$$

设$\{z_n\}$ 为 $\Omega(z)$ 的极小化序列，即

$$\lim_{n \to \infty} \Omega(z_n) = \Omega_0 \tag{2.17}$$

不失一般性，可以认为对所有的 $n > 1$，有

$$\Omega(z_n) \leqslant \Omega(z_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \Omega(z_1) \tag{2.18}$$

于是，序列$\{z_n\}$ 中一定存在收敛的子序列$\{z_{n_k}\}$，设

$$\lim_{k \to \infty} z_{n_k} = z_\delta \tag{2.19}$$

由于在 F_1 上序列$\{z_{n_k}\}$ 的致密性，可知元素 $z_\delta \in F_1$。因此泛函 $\Omega(z)$ 在 z_δ 有定义。

根据泛函 $\Omega(z)$ 在元素 z_δ 上的连续性

$$\lim_{k\to\infty}\Omega(z_{n_k}) = \Omega(z_\delta) \tag{2.20}$$

$$\lim_{k\to\infty}\Omega(z_{n_k}) = \Omega_0 \tag{2.21}$$

则有

$$\Omega(z_\delta) = \Omega_0 = \inf_{z\in F_{1,\delta}} \Omega(z) \tag{2.22}$$

这样证明了算子 $\overline{R}(u_\delta,\delta)$ 满足正则算子定义的性质 1。

(2) $\overline{R}(u_\delta,\delta)$ 关于正则算子定义的性质 2 正确性。

因为元素 z_δ 使得集合 $F_{1,\delta}$ 上的泛函 $\Omega(z)$ 极小化和 $z_\delta \in F_{1,\delta}$，则显然有

$$\Omega(z_\delta) \leqslant \Omega(z_T) \tag{2.23}$$

这样元素 z_δ 就属于 F_1 内的紧集

$$F_T = \{z\,|\,\Omega(z) \leqslant \Omega(z_T)\} \tag{2.24}$$

设 $\{\delta_n\}$ 为收敛于零的正数数列，$\{u_n\}$ 是由满足 $\rho_U(u,u_\delta) \leqslant \delta_n$ 的元素 $\{u\}$ 所构成序列，对每个 δ_n 所确定的可能解集记为 Q_{δ_n}。令

$$F_{1,\delta_n} = Q_{\delta_n} \cap F_1 \tag{2.25}$$

根据以上的证明可知，在每个集合 F_{1,δ_n} 上都有使泛函 $\Omega(z)$ 在其上达到极小的元素 z_{δ_n}。于是对应于数列 $\{\delta_n\}$ 的序列 $\{z_{\delta_n}\}$ 属于在 F_1 上的紧集 F_T。因而，由 $\{z_{\delta_n}\}$ 中按在 F 空间的度量意义下可选出收敛的子序列 $\{z_{\delta_{n_k}}\}$。令

$$\bar{z} = \lim_{n_k\to\infty} z_{\delta_{n_k}} \tag{2.26}$$

因为 $z_{\delta_n} \in F_{1,\delta_n} \subset Q_{\delta_n}$，所以对每个元素 $z_{\delta_{n_k}}$ 子序列满足不等式

$$\rho_U(Az_{\delta_{n_k}}, u_{\delta_{n_k}}) \leqslant \delta_{n_k} \tag{2.27}$$

令 $n_k \to \infty$，利用算子 A 的连续性，得

$$\rho_U(A\bar{z}, u_T) = 0 \tag{2.28}$$

因而，$A\bar{z} = u_T$。由于当右端 $u = u_T$ 时的方程式 $Az = u$ 的解是唯一的，故有 $\bar{z} = z_T$，从而

$$\lim_{n_k\to\infty} z_{\delta_{n_k}} = z_T \tag{2.29}$$

于是 $\overline{R}(u_\delta,\delta)$ 作为正则算子定义的性质 2 也正确。

注 1　若 $Az=u_T$ 的解不唯一，仍可用上述方法建立正则算子 $\overline{R}(u,\delta)$ 。这样得到的收敛子序列 z_{δ_n} 将收敛于解集中的某一个，且不同的收敛子序列可能将收敛于不同的解。

注 2　我们通过稳定泛函适当缩小可能解集后，使得所求出的正则解具有稳定性，这也正是 $\Omega(z)$ 的名称的由来。

若 $\Omega_0=\inf\limits_{z\in F_1}\Omega(z)$，$M_0=\{z\in F_1 \mid \Omega(z)=\Omega_0\}$，则它们之间有两种情形：

(1) $M_0\cap F_{1,\delta}\neq\varnothing$；

(2) $M_0\cap F_{1,\delta}\neq\varnothing$。

在第一种情形下，任取 $z_0\in M_0$ 作为 $Az=u_\delta$ 的稳定近似解即可；在第二种情形下，若 $\Omega(z)$ 为拟单调的（即如果对 F_1 中的任意一个不属于集合 M_0 的元素 z_0，在它的任何邻域内均存在 F_1 中的元素 z_1，使得 $\Omega(z_1)<\Omega(z_0)$），则 $\Omega(z)$ 的下界在使 $\rho_U(Az_\delta,u_\delta)=\delta$ 的元素 z_δ 上达到。这样，求 $\Omega(z)$ 的最小值问题就变成下列条件极值问题：

$$\lim_{z\in F_1}\Omega(z) \tag{2.30}$$

满足条件

$$\rho_U(Az,u_\delta)=\delta \tag{2.31}$$

用Lagrange乘数法解决上述条件极值问题，即在 F_1 上求泛函

$$M^\alpha[z,u_\delta]=\rho_U^2(Az,u_\delta)+\alpha\Omega(z) \tag{2.32}$$

的极小值。式中数值参数 α 由 $\rho_U(Az_\delta,u_\delta)=\delta$ 确定，且 z_α 是使 $M^\alpha[z,u_\delta]$ 达到其下界的元素；$z_\alpha=R_1(u_\delta,\alpha)$，其中 $\alpha=\alpha(\delta)$ 根据误差确定，此时 z_α 可作为 $Az=u_\delta$ 的近似解。

稳定泛函 $\Omega(z)$ 的选择常常是根据算子 A 的具体特性而定，并

且在许多情况下，它的选择不是唯一的。

我们把泛函 $M^{\alpha}[z,u_{\delta}]$ 称为展开泛函。

显然，借助于求展开泛函 $M^{\alpha}[z,u_{\delta}]$ 极小值而后构成 $Az=u_{\delta}$ 的正则算子，此时，参数 α 由条件 $\rho_{U}(Az_{\alpha},u_{\delta})=\delta$ 根据误差确定。这与通过在使 $\rho_{U}(Az,u_{\delta})\leqslant\delta$ 成立的元素 z 的集合上求泛函 $\Omega(z)$ 的极小值的方法相当。然而，前者可以取得更广泛类别的正则算子。

定理 3　设 $A:F\to U$ 连续，则对 $\forall u\in U$ 及 $\forall\alpha>0$ 都存在 $z_{\alpha}\in F_1\subset F$（$F_1$ 在 F 中稠密），使得泛函 $M^{\alpha}[z,u_{\delta}]=\rho_{U}^{2}(Az,u_{\delta})+\alpha\Omega(z)$ 在 z_{α} 达到其下界，即

$$\inf_{z\in F_1}M^{\alpha}[z,u]=M^{\alpha}[z_{\alpha},u] \tag{2.33}$$

证明　因为对 $\forall z\in F_1$，$M^{\alpha}\geqslant 0$，故下确界 $\lim\limits_{z\in F_1}M^{\alpha}[z,\alpha]=M^{\alpha}$ 是存在的，设 $\{z_n^{\alpha}\}\subset F_1$ 是一个极小化序列，使 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n^{\alpha}=M_0^{\alpha}$，其中 $M_n^{\alpha}=M^{\alpha}[z_n^{\alpha},u]$。为了不失一般性，设

$$M_{n-1}^{\alpha}\leqslant M_n^{\alpha}\leqslant\cdots\leqslant M_1^{\alpha} \tag{2.34}$$

此时对 $\forall n$ 和 $\forall\alpha>0$，有

$$\Omega(z_n^{\alpha})\leqslant\frac{1}{\alpha}M_1^{\alpha}=Q \tag{2.35}$$

可见，$\{z_n^{\alpha}\in F_1\,|\,\Omega(z_n^{\alpha})\leqslant Q\}$ 集是 F_1 中的紧集，故可从中选出收敛于 $z_{\alpha}\in F_1$ 的子序列 $\{z_{n_k}^{\alpha}\}$。利用算子 A 的连续性

$$\begin{aligned}\inf_{z\in F_1}M^{\alpha}[z,u]&=\lim_{n\to\infty}M^{\alpha}[z_n^{\alpha},u]\\&=\lim_{n_k\to\infty}M^{\alpha}[z_{n_k}^{\alpha},u]\\&=\lim_{n_k\to\infty}\{\rho_{U}^{2}(Az_{n_k}^{\alpha},u)+\alpha\Omega(z_{n_k}^{\alpha})\}\\&=\rho_{U}^{2}(Az_{\alpha},u)+\alpha\Omega(z_{\alpha})\end{aligned} \tag{2.36}$$

于是定理得到证明。

注 若算子 A 是线性的，F 是 Hilbert 空间且 $\Omega(z)$ 为二次稳定泛函，则元素 z_α 是唯一的。而对非线性算子来说，z_α 可能是不唯一的。

定理 4 令 $z_\alpha = R_1(u,\alpha)$，则 $R_1(u,\alpha)$ 是方程 $Az = u$ 的正则算子，其中 $R_1(u,\alpha)$ 是由展开泛函确定的算子。

该定理的证明与定理 2 的证明相类似，这里从略。

2.1.3 稳定泛函

上面已对正则算子的构成作了介绍，并且可知在构成展开泛函时，需要给定一个稳定泛函。这里将讨论该稳定泛函的具体形式。

设度量空间 F 中子集 Φ 允许以更强的度量进行度量化，即 $\forall z_1,z_2 \in \Phi \subset \mathrm{F}$，有

$$\rho_{\mathrm{F}}(z_1,z_2) \leqslant \rho_{\Phi}(z_1,z_2) \tag{2.37}$$

且集合 $\{z \mid \rho_{\Phi}(z,z_0) \leqslant d\}$（以 F 的度量）在 F 内致密，则定理 3 是正确的。即存在 $z_\alpha \in \Phi$，使得

$$\inf_{z\in\Phi} M^\alpha[z,u_\delta] = \rho_{\mathrm{U}}^2(Az,u_\delta) + \alpha\Omega(z) = M^\alpha[z_\alpha,u_\delta] \tag{2.38}$$

其中 $\Omega(z) = \rho_{\Phi}(z,0)$。我们指出，在 Φ 中求 $Az = u$ 的精确解，则对 $\forall \alpha > 0, \bar{u} \in \mathrm{U}$ 给出使上述展开泛函 $M^\alpha[z,\bar{u}]$ 极小化的元素 $\bar{z}_\alpha$ 的算子 $R_2(\bar{u},\alpha)$ 便是正则算子。

下面针对不同的度量给出具体的稳定泛函 $\Omega(z)$。

例 1 $\mathrm{F} = \mathrm{C}[a,b]$，度量为

$$\rho_{\mathrm{F}}(z_1,z_2) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |z_1(x) - z_2(x)| \tag{2.39}$$

此时可取 $\Phi = \mathrm{C}^1[a,b]$ 的度量为

$$\rho_{\Phi}(z_1,z_2) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} \{|z_1 - z_2| + |z_1' - z_2'|\} \tag{2.40}$$

由 Arzela 定理知，对 $\forall\ \{z_n\}, \rho_\Phi(z_n, z_0) \leqslant d$，总有$\{z_{n_k}\}$一致收敛于 $z_0 \in \mathrm{F}$，从而$\{z \mid \rho_\Phi(z, z_0) \leqslant d\}$ 在 $\mathrm{C} = \mathrm{F}$ 内稠密。

例 2　$\mathrm{F} = \mathrm{C}[a, b]$，度量为

$$\rho_{\mathrm{F}}(z_1, z_2) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |z_1(x) - z_2(x)| \tag{2.41}$$

取 $\Phi = \mathrm{W}_2^p[a, b]$(Sobolev 空间）的度量为

$$\rho_\Phi(z_1, z_2) = \left\{\int_a^b \sum_{r=0}^p q_r(x)\left(\frac{\mathrm{d}^r z}{\mathrm{d}x^r}\right)^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.42}$$

其中 $z = z_1 - z_2, q_0(x), q_1(x), q_2(x), \cdots, q_p(x)$ 为给定的非负连续函数，且 $q_p(x) > 0$。

众所周知，对 $\forall\ p \geqslant 1, \mathrm{W}_2^p[a, b]$ 为 Hilbert 空间，其中的球体 $\{z \mid \rho(z, z_0) < d\}$ 在 C 内致密，因此在 $\mathrm{W}_2^p[a, b]$ 内求 $Az = u$ 的正则解时，定理 3、定理 4 均成立。此时取

$$\Omega(z) = \int_a^b \sum_{r=0}^p q_r(x)\left(\frac{\mathrm{d}^r z}{\mathrm{d}x^r}\right)^2 \mathrm{d}x \tag{2.43}$$

我们把式(2.43) 所定义的稳定泛函称为 p 阶稳定子（或 Tikhonov 稳定子）。

若 $q_r(x)$ 为常数，则上式称为有常系数的 p 阶稳定子。

例 3　类似地 $\mathrm{F} = \mathrm{C}(\Omega), \Omega \subset \mathrm{R}^n$，距离为

$$\rho_{\mathrm{F}}(z_1, z_2) = \sup_{x \in \Omega} |z_1(x) - z_2(x)| \tag{2.44}$$

取 $\Phi = \mathrm{W}_2^p(\Omega)$ 及度量为

$$\rho_\Phi(z_1, z_2) = \left\{\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha z|^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.45}$$

或者，根据 Poincare 不等式，取

$$\rho_\Phi(z_1, z_2) = \left\{\int_\Omega \sum_{|\alpha| = m} |D^\alpha z|^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.46}$$

其中 $z = z_1(x) - z_2(x)$。

这样所定义的稳定泛函为更一般的 m 阶稳定子，它是上例 p 阶稳定子在 n 维空间上的一般形式。

2.1.4 算子方程的拟解与正则解

一般来说，算子方程 $Az=u(u\in \mathrm{U},z\in \mathrm{F},\mathrm{U}$、$\mathrm{F}$ 为度量空间)的解应在算子 A 的定义域M内找出，使得 $z=A^{-1}u$。但在实际问题中，方程的右端常用我们已知的近似值 $\bar{u}$ 来代替，此近似值可能不属于集合 $\mathrm{N}=A\mathrm{M}$，在此情况下算子 $A^{-1}u$ 无定义，从而近似解也不能用 $z=A^{-1}u$ 得到。为排除右端 u 不精确时方程 $Az=u$ 无解的困境，Ivanov 提出了拟解的概念，即

定义 4 对于给定的 u，在集合上使得泛函 $\rho_{\mathrm{U}}(Az,u)$ 取极小的元素 $\bar{z}\in \mathrm{M}$ 被称为方程 $Az=u$ 在M上的拟解

$$\rho_{\mathrm{U}}(A\bar{z},u)=\inf_{z\in \mathrm{M}}\rho_{\mathrm{U}}(Az,u) \tag{2.47}$$

显然，若M为紧集，则对 $\forall\ u\in \mathrm{U}$ 算子方程 $Az=u$ 都有拟解；此外，若 $u\in A\mathrm{M}$，则拟解 $\bar{z}$ 与算子方程 $Az=u$ 的普通(精确)解相一致。

令元素 y 和集合Q属于U，集合Q的元素 q 如果满足

$$\rho_{\mathrm{U}}(y,q)=\rho_{\mathrm{U}}(y,Q)=\inf_{h\in Q}\rho_{\mathrm{U}}(y,h) \tag{2.48}$$

称它为元素 y 在Q上的投影 $q=Py$。

定理 5 若方程式 $Az=u$ 在紧集M上有不多于一个的解和对每一个元素 $u\in \mathrm{U}$ 在集合 $\mathrm{N}=A\mathrm{M}$ 上的投影是唯一的，则方程 $Az=u$ 的拟解是唯一的，且拟解连续依赖于右端项 u。

证明 令 $\bar{z}$ 为拟解，且 $A\bar{z}=\bar{u}$，显然 $\bar{u}$ 是 u 对集合 $\mathrm{N}=A\mathrm{M}$ 的投影。按照定理的条件，它是被单值确定出来的。由此可见，因为集合M到集合N上的映象互为单值，故拟解是唯一的。

明显地，$\bar{z}=A^{-1}\bar{u}=A^{-1}Pu$。根据有关紧集逆映象连续的引理，逆算子 A^{-1} 在N上是连续的，又投影算子 P 对 u 是连续的，所以 $A^{-1}P$ 是对 u 连续的算子，因而拟解 $\bar{z}$ 是连续依赖于右端 u 的。

注 使用了拟解后，问题就具有了稳定性。若方程 $Az=u$ 的

解的唯一性不定，则拟解构成紧集 M 中的一个子集，此时定理就变成多值映象的情况，在多值映象情况下定理的论点仍然成立。

对于 A 为线性算子时，易得以下定理：

定理6 设方程式 $Az=u$ 是线性的，齐次方程 $Az=0$ 仅有零解，集 M 是凸集，空间 U 是严格凸空间，则方程 $Az=u$ 在紧集 M 上的拟解就是唯一的，并连续依赖于右端 u。

设 F 及 U 为 Hilbert 空间，$M=S_R=\{z \mid \|z\| \leqslant R\}$，$A$：F→U 为全连续算子，此时 A^*A 为 F→F 的自共轭正全连续算子，其拟解可以按照 A^*A 的全系特征元素（函数，向量）的标准正交系 $\{\varphi_n\}$ 的级数形式给出。设 $\{\lambda_n\}$ 为 A^*A 的特征值的对应于 $\{\varphi_n\}$ 的全系特征值：$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots$。此时元素 A^*u 可以用下列级数形式给出：

$$A^*u=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n \tag{2.49}$$

在此条件下如下定理成立：

定理7 方程 $Az=u$ 在集 S_R 上的拟解有如下形式：

$$\bar{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\lambda_n}\varphi_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{\lambda_n^2}\leqslant R^2 \tag{2.50}$$

而如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{\lambda_n^2}\geqslant R^2 \tag{2.51}$$

则

$$\bar{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\beta+\lambda_n}\varphi_n \tag{2.52}$$

式中 β 为下列方程的根

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{(\beta+\lambda_n)^2}=R^2 \tag{2.53}$$

设方程 $Az=u$ 是 F→U 的线性算子，其值域 R(A) 在 U 中稠密，逆算子 A^{-1} 存在，但不连续。

设$\Omega(z)$定义在F中稠密子集F_1上且满足下列条件的连续非负凸泛函：

(1) $\Omega(0)=0$；

(2) 对F_1中所有的固定元素$z(z\neq 0)$，$\varphi(\beta)=\Omega(\beta z)$是变量$\beta$的严格增函数，且$\lim\limits_{\beta\to+\infty}\varphi(\beta)=+\infty$；

(3) 对所有的$d\geqslant 0$，集合$F_d^1=\{z|z\in F_1,\Omega(z)\leqslant d\}$紧致。

显然$\Omega(z)$是方程$Az=u$的稳定泛函，且

$$F_1=\bigcup_{d\geqslant 0}F_d^1 \tag{2.54}$$

我们指出p阶稳定泛函$\Omega(z)=\int_a^b\sum_{r=0}^{p}q_r(x)\left(\frac{\mathrm{d}^r z}{\mathrm{d}x^r}\right)^2\mathrm{d}x$具有上述性质。

设z_d是紧集F_d^1上的方程式$Az=u$的拟解，即z_d是紧集F_d^1上泛函$\|Az-u\|^2$极小化的元素，则$\Omega(z_d)=d$。因此当给定$d>0$时，求紧集F_d^1上方程式$Az=u$的拟解z_d的问题便归结为在条件$\Omega'(z)=d$下求泛函

$$\rho_U(Az,u)=\|Az-u\|^2 \tag{2.55}$$

的极小值，或归结为求下列泛函的无条件极小值：

$$M^\alpha[z,u]=\rho_U(Az,u)+\alpha\Omega(z) \tag{2.56}$$

设元素z_d使泛函$M^\alpha[z,u]$极小化，则显然它是紧集F_d^1上的方程$Az=u$的正则解。这样，拟解就是正则解。把z_d代入方程$Az=u$得误差$\rho_U(Az_\alpha,u)=\delta_\alpha$。

三个数值参数d、α和δ_α以下列两个关系式相联系：

$$\Omega(z_\alpha)=d,\quad \rho_U(Az,u)=\delta_\alpha \tag{2.57}$$

任给其中一个，便可以由这两个关系式求得其它两个。在正则法中，通常给定的是参数δ_α。

若$d_1<d_2$时$F_{d_1}^1\subset F_{d_2}^1$，故集$F_{1,\delta}=F_1\cap Q_\delta$上的方程$Az=u$的正则解属于集合$F_1=\bigcup\limits_{d\geqslant 0}F_d^1$。

可见方程式 $Az = u$ 的正则近似解族是由扩展紧集 F_d^1 族上的拟解构成的。

我们知道，算子方程 $Az = u$ 的拟解可用级数来表示，而正则解与拟解之间有着上述的关系，则算子方程的正则解也可以用级数形式给出。

设 F 及 U 为 Hilbert 空间，A：F → U 为全连续算子，$F_1 \subset F$ 为子 Hilbert 空间，且集合 $\{z \in F_1 \mid \|z\| \leqslant d\}$ 在 F 中致密，故可取 $\Omega(z) = \|z\|^2$ 为稳定子。于是展开泛函有下列形式：

$$A^* Az + \alpha z = A^* u \tag{2.58}$$

$A^* A$ 是自共轭算子，A^* 为 A 的共轭算子。

设 $\{\varphi_n\}$ 为自共轭算子 $A^* A$ 对应于特征 $\{\lambda_n\}$ 的全部特征元素，则

$$A^* u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n \tag{2.59}$$

设方程 $Az = u$ 的解以下列级数式表示：

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n \tag{2.60}$$

则有

$$b_n = \frac{C_n}{\lambda_n + \alpha} \tag{2.61}$$

其中参数 α 按误差确定。

2.1.5　正则参数的选取

关于正则参数 α 的选取问题，我们在这里仅对用变分法所得到的正则算子 $R_1(u,\alpha)$ 加以讨论。

在讨论应用正则方法求解算子方程的正则解时，作为与原始 u_δ 的误差 $\delta(\rho_U(u_\delta, u_T) = \delta)$ 有关的函数 $\alpha = \alpha(\delta)$，α 的数值是很难被确定的。我们往往只知道表示原始信息的不确定性的数 δ，我们必须在允许数值中（即函数 $\alpha = \alpha(\delta)$ 当中的一个数值，且 $R\backslash -1(u,\alpha(\delta))$ 是正则算子），求与其相对应的正则参数 α。

设方程 $Az = u_\delta$ 的右端已知，其误差为 δ，即 $\rho_U(u_\delta, u_T) \leqslant \delta$。为了根据误差 δ 确定 α，即由

$$\rho_U(u_\delta, u_T) = \delta \tag{2.62}$$

确定，我们有必要讨论一下所需条件。

把泛函 $M^\alpha[z_\alpha, u]$、$\rho_U{}^2(Az_\alpha, u)$、$\Omega(z_\alpha)$ 作为 α 的函数分别记作 $m(\alpha)$、$\varphi(\alpha)$、$\psi(\alpha)$。若其上达到 $\inf M^\alpha[z, u]$ 的元素集合 $F^\alpha = \{z_\alpha\}$ 是由一个以上的元素构成时，则 $\varphi(\alpha)$、$\psi(\alpha)$ 就是多值函数。我们现在就来讨论 $m(\alpha)$、$\varphi(\alpha)$ 和 $\psi(\alpha)$ 的某些性质。而这里仅讨论它们是单值函数的情况。

引理1 函数 $m(\alpha)$、$\varphi(\alpha)$ 和 $\psi(\alpha)$ 是单调函数；$m(\alpha)$ 和 $\varphi(\alpha)$ 是非降函数，而 $\psi(\alpha)$ 是非增函数。

证明 设 $\alpha_1 < \alpha_2$，$\varphi_i = \rho_U^2(Az_{\alpha_i}, u)$，$\psi_i = \Omega(z_{\alpha_i})$，$m_i = M^{\alpha_i}[z_{\alpha_i}, u](i = 1, 2)$，而且 z_{α_i} 为集 F_{α_i} 中的任一元素，从不等式

$$m_2 = \varphi_2 + \alpha_2\psi_2 \geqslant \varphi_2 + \alpha_1\psi_2 \geqslant \varphi_1 + \alpha_1\psi_1 = m_1 \tag{2.63}$$

可知 $m(\alpha)$ 是单调的。

其次，由

$$\varphi_1 + \alpha_1\psi_1 \leqslant \varphi_2 + \alpha_1\psi_2 \tag{2.64}$$

$$\varphi_2 + \alpha_2\psi_2 \leqslant \varphi_1 + \alpha_2\psi_1 \tag{2.65}$$

得 $(\alpha_1 - \alpha_2)\psi_1 \leqslant (\alpha_1 - \alpha_2)\psi_2$。因为 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$，故 $\psi_1 \leqslant \psi_2$。由此结果及式(2.63) 可得 $\varphi_2 \geqslant \varphi_1$。引理得证。

注 如果集合 $F^\alpha = \{z_\alpha\}$ 有多个元素，则尽管函数 $m(\alpha)$ 就其定义而言是单值的，而函数 $\varphi(\alpha)$ 和 $\psi(\alpha)$ 都可以是多值的，这是因为在 F^α 上，式 $m(\alpha) = \varphi(\alpha) + \alpha\psi(\alpha)$ 的各个被加数 $\varphi(\alpha)$ 和 $\psi(\alpha)$ 可有不同值，引理当中的唯一性是指这些函数的任一数值。

引理2 设正数序列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 $\alpha_0 > 0$，而 $\{z_{\alpha_n}\}$ 是集合 F^{α_n} 中的相应元素 z_{α_n} 的序列。若序列 $\{z_{\alpha_n}\}$ 是收敛的，则

$$\lim_{n\to\infty} z_{\alpha_n} = \bar{z} \in F^{\alpha_0} \tag{2.66}$$

证明　因为泛函 $M^{\alpha}[z,u]$ 对 z 和 α 是连续的，所以

$$\lim_{n\to\infty} M^{\alpha_n}[z_{\alpha_n},u] = M^{\alpha_0}[\bar{z},u] \tag{2.67}$$

设元素 $\bar{z} \notin F^{\alpha_0}$，即该元素不实现泛函 $M^{\alpha_0}[z,u]$ 的最小值。则存在元素 $z^1_{\alpha_0} \in F^{\alpha_0}$，使得

$$M^{\alpha_0}[z^1_{\alpha_0},u] = M^{\alpha_0}[\bar{z},u] - \beta, \quad \beta > 0 \tag{2.68}$$

此假定将导致矛盾，因为在此情况下，有

$$\lim_{n\to\infty} M^{\alpha_n}[z_{\alpha_0},u] = M^{\alpha_0}[z_{\alpha_0},u] = M^{\alpha_0}[\bar{z},u] - \beta \tag{2.69}$$

从而存在 $N(\beta)$，使得对所有的 $n \leqslant N(\beta)$，均有

$$M^{\alpha_n}[z_{\alpha_0},u] < M^{\alpha_0}[\bar{z},u] - \frac{\beta}{2} \tag{2.70}$$

另一方面，从 $M^{\alpha_n}[z_\alpha,u]$ 的定义可知

$$M^{\alpha_n}[z_{\alpha_n},u] > M^{\alpha_0}[\bar{z},u] - \frac{\beta}{2} \tag{2.71}$$

因此

$$M^{\alpha_n}[z_{\alpha_n},u] > M^{\alpha_n}[z_{\alpha_0},u] \tag{2.72}$$

这与 z_{α_n} 为 $M^{\alpha_n}[z,u]$ 的极小值相矛盾，故引理结论成立。

引理 3　当每一个 $\alpha > 0$ 时，函数 $m(\alpha)$、$\varphi(\alpha)$ 和 $\psi(\alpha)$ 是左半和右半连续的。

证明　这里仅以函数 $\varphi(\alpha)$ 为例，证明左半连续性。

令 $\{\alpha_n\}$ 是递增的收敛于 α_0 的正数列，使泛函 $M^{\alpha_n}[z,u]$ 极小化的元素序列 $\{z_{\alpha_n}\} \subset F^{\alpha_n}$ 与之对应，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，z_{α_n} 属于紧集 $\{z \mid \Omega(z) \leqslant \Omega(z_{\alpha_0-\varepsilon}, \varepsilon > 0)\}$。因此可以从中选出收敛子序列，不妨仍记为 $\{z_{\alpha_n}\}$。令 $\lim\limits_{n\to\infty} z_{\alpha_n} = \bar{z}$。根据上述引理知，$\bar{z} \in F^{\alpha_0}$。于是

$$\rho_U(Az_{\alpha_n},u) \to \rho_U(Az_{\alpha_0},u) \quad (\text{当 } n \to \infty \text{ 时}) \tag{2.73}$$

按照引理 1 序列 $\{\varphi(\alpha_n)\}$ 是不减的。它收敛到某个数值 $\bar{\varphi}$，该数恰是数值集合 $\{\varphi(\alpha_0)\}$ 的下确界。假若不是如此，则存在 $\bar{\varphi}(\alpha_0) < \bar{\varphi}$。

所以对足够大的 n，可以找到 F^{α_n} 中的元素 z_{α_n}，对 z_{α_n} 来说 $\bar{\varphi}(\alpha_n) < \bar{\varphi}$，这就违背了函数 $\varphi(\alpha)$ 的单调性。由此可见，原序列 $\{z_{\alpha_n}\}$ 的任意子序列 $\{z_{\alpha_n}\}$ 所对应的子序列 $\{\varphi(\alpha_n)\}$ 收敛于 $\bar{\varphi}$。这就意味着所有的子序列 $\{\varphi(\alpha_n)\}$ 收敛于 $\bar{\varphi}$，于是 $\varphi(\alpha)$ 的左连续性得到证明。

推论 函数 $m(\alpha)$ 是连续非降函数。

这个证明只要注意到 $m(\alpha) = M^{\alpha}[z_{\alpha},u]$ 的定义及它是 α 的单值函数，便可以直接得到结论。

引理 4 若 AF 在 U 内稠密，$m(0) = 0$，则当 $\alpha \to 0$ 时，$m(\alpha) \to 0$。

关于 $\varphi(\alpha)$，我们有 $\varphi(0) = 0$，这由下式可得到：

$$\varphi(\alpha) + \alpha\psi(\alpha) = m(\alpha) \to 0 (\text{当 } \alpha \to 0 \text{ 时}) \tag{2.74}$$

由所列举的引理，可以直接得到下边的定理。

定理 8 如果 $\varphi(\alpha)$ 是单值函数，则对每个小于 $\rho_U(Az_0,u)$ 的正数 δ，均存在这样一种 $\alpha(\delta)$，使得

$$\rho_U(Az_{\alpha(\delta)},u) = \delta \tag{2.75}$$

式中 $z_0 \in \{z \mid \Omega(z) = \inf_{\gamma \in F_1} \Omega(\gamma)\}$。

以上对 α 的存在性作了理论探讨，在具体数值计算时，由误差 δ 来确定 α 的方法有下列几种：

(1) 设 δ 是原始资料 u_δ 的误差，取单调趋于 0 的数列 $\{\alpha_n\}$ 的有限个数 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，(譬如等比数列 $\alpha_k = \alpha_0 q^k, k = 0,1,2,\cdots,n, 0 < q < 1$) 对于每个 α_k 求使泛函 $M^{\alpha_k}[z,u_\delta]$ 极小化的元素(函数) z_{α_k}，并计算误差 $\rho_U(Az_{\alpha_k},u_\delta)$。取满足下列等式的 α_{k_0} 作为所求的 α 值：

$$\rho_U(Az_{\alpha_{k_0}},u_\delta) = \delta \tag{2.76}$$

方程式 $\varphi(\alpha) = \rho_U(Az_\alpha,u_\delta) = \delta$ 关于 α 的近似解也可以用 Newton 切线法求得。对此，要注意到 $\varphi(\alpha)$ 为非降、向下凹的函数。所以 Newton 切线法在任意初始近似值 $\alpha_0 > 0$ 的情况下均收敛。

Newton 切线法所必需的函数 $\varphi(\alpha)$ 的导数用正则解 z_α 对变量 α 的导数 $y_\alpha = \frac{dz_\alpha}{d\alpha}$ 来表示。

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d\varphi}{dz_\alpha}\frac{dz_\alpha}{d\alpha} \tag{2.77}$$

其中 $\frac{d\varphi}{dz_\alpha}$ 为 $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta)$ 对 z_α 的 Fréchet 导数。

元素 z_α 是泛函 $M^\alpha[z, u_\delta]$ 的 Euler 方程

$$(A^* A + \alpha B)z = A^* u_\delta \tag{2.78}$$

的解，式中 $B = \Omega(z)$ 是按 $\Omega(z)$ 的 Fréchet 导数。对变量 α 微分，由恒等式 $(A^* A + \alpha B)z_\alpha = A^* u_\delta$，得出 $y_\alpha = \frac{dz_\alpha}{d\alpha}$ 是方程式

$$(A^* A + \alpha B)y = -\alpha B z_\alpha \tag{2.79}$$

的解，这个方程与方程式(2.78)的区别仅在于右端。

(2) 在 F_1 中求满足 $\Omega(z) \leqslant R^2$ 的元素 z_{α_0} 使

$$\inf_{\Omega(z)\leqslant R^2} \rho_U^2(Az, u_\delta) = \rho_U^2(Az_\alpha, u_\delta) \tag{2.80}$$

此时正则参数 α 可由条件 $\Omega(z_\alpha) = R^2$ 确定。此方程的可解性与 $\rho_U(Az_\alpha, u) = \delta$ 的可解性可以类似地证明。

在实际计算中，可从给定的单调下降数列 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中选择能满足 $\Omega(z_\alpha) = R^2$ 的 α。

若采用 Newton 切线法求解，则有下列迭代过程：

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\Omega(z_{\alpha_n}) - R^2}{B\frac{dz_{\alpha_n}}{d\alpha}}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{2.81}$$

其中 α_1 为初始猜测值，$\frac{dz_{\alpha_n}}{d\alpha}$、$z_{\alpha_n}$ 分别由式(2.78)、(2.79)确定。

(3) 假定 F 是赋范空间，定义

$$\alpha_q = \inf_{\alpha} \sup_{\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta} \left\| \alpha \frac{dz_\alpha}{d\alpha} \right\|_F \tag{2.82}$$

式中sup是对满足不等式$\rho_U(u_\delta,u_T)\leqslant\delta$的方程式$Az=u$的整个右端$u_\delta$来取的。为了近似求得$\alpha_q$，要求出相应于大量的可能的右端$u_\delta$的正则解$z_\alpha$。我们常常只有一个右端$u_\delta$，此时我们只能求出

$$\inf_{\alpha}\left\|\alpha\frac{\mathrm{d}z_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\right\|_F \tag{2.83}$$

在此必须指出函数$y_\alpha=\alpha\dfrac{\mathrm{d}z_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}$是下列方程式的解：

$$(A^*A+\alpha B)y=A^*Az_\alpha-A^*u_\delta \tag{2.84}$$

(4) 定义函数

$$v(\alpha)=\frac{\rho_U\left(A(\alpha\dfrac{\mathrm{d}z_\alpha}{\alpha}),Az_\alpha-u_\delta\right)}{\rho_U(Az_\alpha,u_\delta)} \tag{2.85}$$

我们取$\alpha=\alpha_0$使得

$$v(\alpha_0)=\max_{\alpha}v(\alpha) \tag{2.86}$$

需要指出的是，这里给出的四种确定α的方法都是针对不同的实际模型而得到的。对于具体遇到的实际模型，确定α的方法不拘泥于这些，还可以选择其它方法或提出另外的方法。不过，确定正则参数的选择方法是否有效，只能通过数值计算才能知道。

2.2 算子逆问题的摄动法

本节将讨论下列算子方程的逆问题

$$L\varphi(x)=q(x),\quad x\in\Omega\subset\mathrm{R}^n \tag{2.87}$$

其中φ是Hilbert空间Φ中的元素，L为定义在Φ上的线性有界算子，$q(x)$为源项，$x\in\mathrm{R}^n$为自变量。

算子方程的正问题是指由已知的线性有界算子L和源项$q(x)$(以及某些定解条件，这里忽略不提)来确定其解$\varphi(x)$，而算子方程的逆问题一般有两类：

(1) 算子识别问题，即由已知源项 $q(x)$ 和关于 φ 的附加条件来确定算子 L；

(2) 源项识别问题，即由已知算子 L 和关于 φ 的附加条件来确定源项 $q(x)$。

关于 φ 的附加条件一般是 Φ 上的一个线性泛函，由 Hilbert 空间中的 Riesz 定理，它一定能表示成内积形式，即

$$J_p(\varphi) = (\varphi, p) = \int_\Omega \varphi(x) p(x) \mathrm{d}x, \quad p(x) \in \Phi \tag{2.88}$$

Ω 为 $\varphi(x)$，$p(x)$ 的定义域。

通常式(2.88) 可以认为是由测量仪器测得，而 $p(x)$ 则表示测量仪器的某些特征。例如：

(1) $p(x) = \delta(x - x_p)$，则 $J_p(\varphi) = \varphi(x_p)$，即 $\varphi(x)$ 在一系列点 x_p 是可测量得到。

(2) $p(x) = \sin\omega_p \cdot x$，则 $J_p(\varphi) = \int_\Omega \varphi(x) \sin\omega_p \cdot x \mathrm{d}x$，即可测量得到关于 $\varphi(x)$ 在频率 ω_p 上的量，$\omega_p \in \mathrm{R}^n$。

2.2.1 算子识别的摄动法

形式上定义非齐次算子方程

$$L^* \varphi_p^* = p(x) \tag{2.89}$$

为式(2.87) 的伴随方程，而式(2.87) 称为基本方程，$p(x)$ 为式(2.88) 中的函数，$\varphi_p^* \in \Phi^*$ (Φ 的共轭空间)。

由伴随算子的性质

$$(Lg, h) = (g, L^* h), \quad \forall g, h \in \Phi \tag{2.90}$$

可得

$$(\varphi_p^*, L\varphi) = (\varphi, L^* \varphi_p^*)$$

应用式(2.87) 和(2.89) 得

$$(\varphi_p^*, q) = (\varphi, p) \tag{2.91}$$

即

$$J_q(\varphi_p^*) = \int_\Omega \varphi_p^*(x)q(x)\mathrm{d}x = J_p(\varphi)$$

这说明：

(1) 基本方程与伴随方程所对应的线性泛函相等，基本方程的源项恰好是伴随方程的观测特征。

(2) 源项识别问题(即 $J_q(\varphi)$, L 已知，求 q)，实际上化简成第一类 Fredholm 积分方程问题。

我们对算子 L 增加一个微小扰动 $\delta L(\|\delta L\| \ll \|L\|)$，则算子方程的解 φ 也将增加一个扰动量 $\delta\varphi$，则关于 $\varphi+\delta\varphi$ 的线性泛函 $J_p(\varphi+\delta\varphi)$ 将变为

$$J_p(\varphi+\delta\varphi) = J_p(\varphi) + J_p(\delta\varphi) = J_p + \delta J_p \tag{2.92}$$

下面将推导 δL 和 δJ_p 之间的关系。

因为

$$(L+\delta L)(\varphi+\delta\varphi) = q$$

$$\begin{aligned}
\delta J_p &= J_p(\varphi+\delta\varphi) - J_p(\varphi) \\
&= (\varphi+\delta\varphi, p) - (\varphi, p) = (\varphi+\delta\varphi, p) - (\varphi_p^*, q) \\
&= (\varphi+\delta\varphi, L^*\varphi_p^*) - (\varphi_p^*, (L+\delta L)(\varphi+\delta\varphi)) \\
&= (\varphi_p^*, L(\varphi+\delta\varphi)) - (\varphi_p^*, (L+\delta L)(\varphi+\delta\varphi)) \\
&= -(\varphi_p^*, \delta L(\varphi+\delta\varphi)) \\
&= -(\varphi_p^*, \delta L\varphi) - (\varphi_p^*, \delta L(\delta\varphi))
\end{aligned}$$

上式中除 δL 为未知量以外，$\delta\varphi$ 也为未知量，但由于假定 δL 为微小扰动，则由 δL 引起的偏差 $(\varphi_p^*, \delta L(\delta\varphi))$ 可以忽略不计，则有

$$\delta J_p = -(\varphi_p^*, \delta L\varphi) \tag{2.93}$$

关于式(2.93)的几点说明：

(1) 对给定初试猜测算子 L，要求它与精确算子 $\bar{L}$ 相当接近，即

$$\|L - \bar{L}\| = \|\delta L\| \ll \|L\|$$

这是微小扰动的理论基础，但要注意到 $\bar{L}$ 是未知的，所以一般

只能做到要求 $\|\delta L\| \ll \|L\|$。

(2) 关于精确算子 $\bar{L}$ 的可测量量，即 $\bar{L}$ 是一个线性泛函 $\overline{J_p}(\bar{\varphi})$（$\bar{\varphi}$是关于 $\bar{L}$ 的精确解），它是已知的，而对于初试猜测算子 L 相对应的线性泛函 $J_p(\varphi)$（φ是关于 L 的解）也是已知量。一般令

$$\delta J_p = \overline{J_p}(\bar{\varphi}) - J_p(\varphi) \tag{2.94}$$

从而由式(2.93)来确定未知量 δL。

(3) 如果不能给出一个与 $\bar{L}$ 相接近的算子 L，则 δJ_p 就比较大，上述微小扰动方法就不能使用。但我们可以作一个序列 $\xi_n(n = 1,2,\cdots,N)$：

① $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_N = 1$；

② $\xi_{n-1} - \xi_n \leqslant \varepsilon$（$\varepsilon$ 是任意给定的小数），使得

$$J_p^n(\varphi) = J_p(\varphi) + \xi_n(\overline{J_p}(\bar{\varphi}) - J_p(\varphi)) \tag{2.95}$$

把每个 $J_p^n(\varphi)$ 作为某个精确算子 $\bar{L}^n$ 的线性泛函，应用式(2.93)就可以求得相应的算子 L_n。按这样的过程就可以求得算子 $\bar{L}$ 的近似算子。

2.2.2　一类算子结构中参数识别的摄动法

给定一个已知结构的线性有界算子

$$L = \sum_{k=1}^{m}[\alpha_k A_k + B_k(\beta_k C_k)] \tag{2.96}$$

其中 A_k, B_k, C_k 为线性积分算子或微分算子，α_k, β_k 为待定参数。

线性有界算子方程为

$$L\varphi = f \quad (\varphi \in \Phi \ \text{Hilbert 空间}) \tag{2.97}$$

以及线性泛函

$$J_{p_j} = (\varphi, p_j), \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{2.98}$$

在式(2.97)、(2.98)中，f、p_j 为已知函数。

下面将利用上述介绍的摄动法来讨论$\{\alpha_k(x), \beta_k(x)\}$的确定问题。

首先选取适当的$\{\alpha_k(x),\beta_k(x)\}$为初试猜测函数，即式(2.97)中的算子$L$已知，求解算子方程式(2.97)正问题可得$\varphi$，并利用式(2.98)可知线性泛函$J_p$的值。

对$\alpha_k(x)$，$\beta_k(x)$进行微小扰动$\alpha_k(x)+\delta\alpha_k(x)$、$\beta_k(x)+\delta\beta_k(x)$，则对应的算子$L$的扰动为

$$\delta L = \sum_{k=1}^{m}[\delta\alpha_k A_k + B_k(\delta\beta_k C_k)] \tag{2.99}$$

泛函式(2.98)的扰动量为

$$\delta J_{p_j} = J_{p_j}(\varphi+\delta\varphi) - J_{p_j}(\varphi) \tag{2.100}$$

其中$\delta\varphi$为L扰动后算子方程式(2.97)的解的扰动量，δJ_{p_j}为已知量。

将式(2.99)、(2.100)代入到式(2.93)中得

$$\sum_{k=1}^{m}(\varphi_{p_j}^*,\delta\alpha_k A_k\varphi) + (\varphi_{p_j}^*,B_k(\delta\beta_k C_k)\varphi) = -\delta J_{p_j},$$

$$j=1,2,\cdots,n \tag{2.101}$$

上述是关于未知函数$\{\alpha_k(x),\beta_k(x)\}$的$n$个积分方程组。

为了说明问题起见，假设$\delta\alpha_k$、$\delta\beta_k$关于变量x都为常数量，则式(2.101)变成

$$\sum_{k=1}^{m}[(\varphi_{p_j}^*,A_k\varphi)\delta\alpha_k + (\varphi_{p_j}^*,B_k(C_k\varphi))\delta\beta_k] = -\delta J_{p_j},$$

$$j=1,2,\cdots,n \tag{2.102}$$

令

$$X = [\delta\alpha_1,\delta\alpha_2,\cdots,\delta\alpha_m,\delta\beta_1,\delta\beta_1,\cdots,\delta\beta_m]^T$$

$$b = -[\delta J_{p_1},\delta J_{p_2},\cdots,\delta J_{p_n}]^T$$

$$a_{ij} = (\varphi_{p_i}^*,A_j\varphi),\ a_{i,j+m} = (\varphi_{p_i}^*,B_j(c_j\varphi))$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,2m} \\ & & & \cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,2m} \end{bmatrix}$$

则$\{\alpha_k(x),\beta_k(x)\}$的识别问题可转化为下列线性代数方程组的求解问题：

$$AX = B \tag{2.103}$$

应当注意到，由于问题本身的不适定性，上述方程组不能采用一般的方法处理，而应用正则化方法来处理。当$\delta\alpha_k,\delta\beta_k$为函数时，我们可以对每一个$\delta\alpha_k(x),\delta\beta_k(x)$在某一个合适的完备正交函数系内展开，并取有限项来近似。这样把确定函数的问题转化成确定有限展开中关于正交基函数前面的系数问题，即转化为上面讨论的情况。

2.2.3 算子结构中参数识别的一个实例

给定微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\beta(x)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)+\alpha(x)\varphi=f(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{2.104}$$

边值条件为

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0$$

及线性泛函

$$J_{p_j}(\varphi)=\int_0^1 p_j(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad j=1,2,\cdots,n$$

其中$p_j(x),f(x)$为已知函数，且$J_{p_j}(\varphi)$为可测量的。$\varphi(x),\alpha(x)$，$\beta(x)$为未知函数。

我们需要确定$\alpha(x),\beta(x)$。

微分方程(2.104)的算子为$L=\alpha+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$。这相当于在式(2.96)中，$m=1,A_1(x)=I$(单位算子)，$B_1=C_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的情况，设$\alpha(x)$、$\beta(x)$为初试猜测函数，扰动量分别为$\delta\alpha(x)$、$\delta\beta(x)$，则由式(2.101)得

$$(\varphi_{p_j}^*,\delta\alpha\varphi)+\left(\varphi_{p_j}^*,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\delta\beta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\right)=-\delta J_{p_j},$$

$$j = 1,2,\cdots,n \quad (2.105)$$

其中 $\varphi^*_{p_j}$ 由下列方程决定：

$$L^* \varphi^*_{p_j} = p_j(x)$$

由 L^* 的定义

$$(L\varphi,h) = (\varphi,L^* h)$$

其中 $\varphi,h \in \Phi$(Hilbert 空间)，且 $\varphi(0) = \varphi(1) = h(0) = h(1) = 0$。

可以推出

$$L^* = L$$

即 L 为自伴算子。

于是 $\varphi^*_{p_j}$ 为下列微分方程的解：

$$\begin{cases} L\varphi^*_{p_j} = p_j(x) \\ \varphi^*_{p_j}(0) = \varphi^*_{p_j}(1) = 0 \end{cases} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \quad (2.106)$$

不难看出，φ和 $\varphi^*_{p_j}$ 由相同结构的算子方程所确定，不同之处在于源项，这对问题分析和数值计算带来许多方便之处。

将 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 在两个完备正交函数系$\{u_i(x)\}$、$\{v_j(x)\}$ 上展开，并取有限项作近似得

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^{m_1} \alpha_j u_j(x), \quad \beta(x) = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j v_j(x) \quad (2.107)$$

$\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 的扰动量 $\delta\alpha(x)$ 和 $\delta\beta(x)$ 分别为

$$\delta\alpha(x) = \sum_{j=1}^{m_1} \delta\alpha_j u_j(x), \quad \delta\beta(x) = \sum_{j=1}^{m_2} \delta\beta_j v_j(x)$$

将上式代入式(2.105)得

$$\sum_{j=1}^{m_1} (\varphi^*_{p_j}, u_j(x))\delta\alpha_j + \sum_{j=1}^{m_2} (\varphi^*_{p_j}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v_j \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}))\delta\beta_j = -\delta J_{p_i},$$

$$i = 1,2,\cdots,n \quad (2.108)$$

上式可写成矩阵形式

$$AX = b \quad (2.109)$$

其中

$$X=[\delta\alpha_1,\cdots,\delta\alpha_{m_1},\delta\beta_1,\cdots,\delta\beta_{m_2}]^T,\quad b=-[\delta J_{p_1},\cdots,\delta J_{p_n}]^T$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m_1} & b_{11} & \cdots & b_{1m_2} \\ & & & \cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm_1} & b_{n1} & \cdots & b_{nm_2} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}=(\varphi_{p_i}^*,u_j(x)\varphi(x))=\int_0^1 u_j(x)\varphi(x)\varphi_{p_i}^*(x)\mathrm{d}x$$

$$b_{ij}=\left(\varphi_{p_i}^*,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(v_j\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\right)=\int_0^1\varphi_{p_i}^*(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(v_j\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 v_j(x)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_{p_i}^*(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

2.3 第一类 Fredholm 积分方程的数值方法

从算子识别问题的讨论可以看出，算子识别问题都可以转化为第一类 Fredholm 积分方程问题。另外，许多微分方程的逆问题也可以转化为第一类 Fredholm 积分方程问题。因此讨论第一类 Fredholm 积分方程的数值方法是很有必要的。由于对第一类 Fredholm 积分方程至今为止还没有完善的理论，我们这里仅讨论该类方程的数值方法，并且详细介绍 Backus - Gilbert 方法，这种方法在许多逆问题中得到了广泛的应用。

本节将讨论

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)\tag{2.110}$$

数值方法问题。

2.3.1 待定系数法

假设式(2.110)的积分方程的解 $\varphi(t)$ 可用 N 个在$[a,b]$上连

续的线性无关的函数$\{u_i(x)\}$来线性地逼近

$$\varphi_N(x)=\sum_{j=1}^{N}\varphi_j u_j(x) \tag{2.111}$$

其中$\varphi_N(x)$为$\varphi(x)$的逼近函数。

将式(2.111)代入到式(2.110)中，得

$$\sum_{j=1}^{N}\varphi_j\int_a^b u_j(x)k(x,t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{2.112}$$

在某种意义下，使式(2.112)成立，便可求得$\{\varphi_i\}$，从而求得式(2.110)的近似解。

1. 配置法

选取$u_i(x)=\delta(x-x_i)$，在$[a,b]$已知点列$\{x_i\}(a=x_1<x_2<\cdots<x_M=b,x_j$为配置点。$M\geqslant N)$，将$\{x_l\}(l=1,2,\cdots,M)$代入式(2.112)，得

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_j\int_a^b\delta(t-x_j)k(x_l,t)\mathrm{d}t=f(x_l),\quad l=1,2,\cdots,M \tag{2.113}$$

由$\delta(t)$的性质，可得$\{\varphi_j\}$的线性方程组

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_i k(x_l,x_i)=f(x_l),\quad l=1,2,\cdots,M \tag{2.114}$$

求解式(2.114)方程组，并将其解代入式(2.111)，便可得$\varphi(x)$的近似解。

2. Galerkin 方法(亦称为矩量法)

设$\{u_i(x)\}$为$L^2[a,b]$空间内的一个完备正交系，$\varphi(x)\in L^2[a,b]$，则当N充分大时，有

$$\varphi_N(x)=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i u_i(x) \tag{2.115}$$

非常接近于$\varphi(x)$。

在式(2.112)两边分别对$\hat{u}_l(x)$求内积，得

$$\sum_{j=1}^{N}\varphi_j\left(\int_a^b u_j(t)k(x,t)\mathrm{d}t, u_l(x)\right) = (f(x), u_l(x)),$$

$$l = 1,2,\cdots,N \quad (2.116)$$

其中内积 $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$。

求解式(2.116)方程组，并将其解代入式(2.111)，便可得到 $\varphi(x)$ 的近似解。

3. 最小二乘法

作目标函数

$$F = \int_a^b \rho(x)\left[\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t - f(x)\right]^2\mathrm{d}x \quad (2.117)$$

其中 $\rho(x)$ 为权因子。

将式(2.111)代入式(2.117)得

$$F = \int_a^b \rho(x)\left[\sum_{j=1}^{N}\varphi_j\int_a^b u_j(t)k(x,t)\mathrm{d}t - f(t)\right]^2\mathrm{d}x$$

$\{\varphi_j\}$ 由求目标函数 F 的最小值来确定。

令 $X = [\varphi_1,\cdots,\varphi_N]^T$，　$A = (a_{ij})_{N\times N}$，　$B = (b_j)_{N\times 1}$

$$a_{ij} = \int_a^b \rho(x)\left[\int_a^b u_i(t)k(x,t)\mathrm{d}t\right]\left[\int_a^b u_j(t)k(x,t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

$$b_j = \int_a^b \rho(x)f(x)\left[\int_a^b u_j(t)k(x,t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

$$C = \int_a^b \rho(x)f^2(x)\mathrm{d}x$$

则目标函数可表示为

$$F[X] = X^TAX - 2X^TB + C \quad (2.118)$$

不难求得，当 X 满足下列方程时，$F[X]$ 达到最小值。

$$AX = B \quad (2.119)$$

求解式(2.119)方程组，并将其解代入式(2.111)便可得到 $\varphi(x)$ 的近似解。

2.3.2 级数展开法

$k(x,t),\varphi(t),f(x)$ 都可以展开成标准正交完备函数系 $\{u_l(x)\}$ 的级数

$$k(x,t)=\sum_{i,j=1}^{\infty}a_{ij}u_i(x)u_j(t) \tag{2.120}$$

$$\varphi(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m u_m(t) \tag{2.121}$$

$$f(x)=\sum_{l=1}^{\infty}b_l u_l(x) \tag{2.122}$$

由于 $\{u_i(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上标准正交，即

$$\int_a^b u_i(x)u_j(x)\mathrm{d}x=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{2.123}$$

将式(2.120)～(2.123)代入式(2.110)得

$$\int_a^b\sum_{i,j=1}^{\infty}a_{ij}u_i(x)u_j(t)\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m u_m(t)\mathrm{d}t=\sum_{l=1}^{\infty}b_l u_l(x)$$

即

$$\sum_{i=1}^{\infty}u_i(x)\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\varphi_j=\sum_{l=1}^{\infty}b_l u_l(x) \tag{2.124}$$

比较式(2.124)两边 $u_l(x)(l=1,2,\cdots)$ 项的系数得到一个关于 $\{\varphi_j\}$ 的无限阶线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\varphi_j=b_i,\quad i=1,2,\cdots \tag{2.125}$$

由于 $k(x,t)$、$\varphi(t)$、$f(x)$ 都可以展为 $\{u_l(x)\}$ 的级数，则 $\forall\ \varepsilon>0$，一定存在 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\left|k(x,t)-\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}u_i(x)u_j(t)\right|<\varepsilon$$

$$\left|\varphi(t)-\sum_{m=1}^{N}\varphi_m u_m(t)\right|<\varepsilon$$

$$\left|f(x)-\sum_{l=1}^{N}b_l u_l(x)\right|<\varepsilon$$

对式(2.125)，取关于 i 求和至 N 为止，则 $\varphi(t)$ 的近似解的系数 $\{\varphi_m\}$ 由下列线性方程组确定：

$$\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\varphi_j=b_j,\quad i=1,2,\cdots,N \tag{2.126}$$

更一般情况下，如果 $k(x,t)$ 能展开成以下形式：

$$k(x,t)=\sum_{m=1}^{N}u_m(x)v_m(t) \tag{2.127}$$

其中可设 $u_m(x)$、$v_m(t)(m=1,2,\cdots,N)$ 为线性无关的，则 $\varphi(t)$ 和 $f(x)$ 能近似地展开成如下形式：

$$\varphi(t)=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i v_i(t) \tag{2.128}$$

$$f(x)=\sum_{m=1}^{N}b_m u_m(x) \tag{2.129}$$

将式(2.127)～(2.129)代入式(2.110)得

$$\sum_{m=1}^{N}u_m(x)\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\int_a^b v_m(t)v_i(t)\mathrm{d}t=\sum_{m=1}^{N}b_m u_m(x)$$

记 $a_{mi}=\int_a^b v_m(t)v_i(t)\mathrm{d}t$，由于 $\{u_m(t)\}(m=1,2,\cdots,N)$ 线性无关，所以 $\{\varphi_i\}$ 满足下列线性方程组：

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_i a_{mi}=b_m,\quad m=1,2,\cdots,N \tag{2.130}$$

又由于 $\{v_m(t)\}(m=1,2,\cdots,N)$ 线性无关，所以 $\det(a_{mi})\neq 0$，从而总可以求解式(2.130)得到 $\{\varphi_i\}(i=1,2,\cdots,N)$，代入式(2.128)便可以得到 $\varphi(t)$ 的近似值。

2.3.3　应用数值积分法求近似解

设式(2.110)中 $k(x,t)$、$f(x)$ 存在一定阶数的连续导数，以便保证相应的积分公式有效。

如果将数值积分采用如下的一般形式：

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} w_i g(x_i) \tag{2.131}$$

式中$\{x_i\}$为$[a,b]$区间上的节点，$\{w_i\}$为积分权系数。

对于式(2.110)，令$x = x_j(j = 1,2,\cdots,M)$得

$$f(x_j) = \int_a^b k(x_j,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{2.132}$$

应用数值积分公式(2.132)得

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^{N} w_i k(x_j,t_i)\varphi(t_i), \quad j = 1,2,\cdots,M$$

令$a_{ij} = w_i k(x_j,t_i)$，$\varphi_i = \varphi(t_i)$，$f(x_j) = f_j$，则$\{\varphi_i\}$由下列线性方程组确定：

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\varphi_i = f_j, \quad j = 1,2,\cdots,M \tag{2.133}$$

应当注意：

(1) 不同的数值积分公式(例如矩形公式，梯形公式，Simpson公式等)有不同的$\{w_i\}$、$\{x_i\}$，可以构成关于$\{\varphi_i\}$的相同类型的线性方程组，不同之处仅是方程组中的系数。

(2) 当$M > N$时，式(2.133)为超定线性代数方程组，求解应采用最小二乘法。

(3) 一般来说，节点取得越多，数值积分的误差越小，从而使得$\varphi(t)$在$\{x_j\}$处的近似值越精确。但是，由于问题本身的不适定性，导致$A = \{a_{ij}\}$矩阵病态，并且节点取得越多，A的病态越严重。因此，用数值方法求解式(2.110)的近似解，结果往往不理想。

2.3.4 Backus—Gilbert 方法

尽管前面介绍了许多求解第一类 Fredholm 积分方程的数值方法，并且最终都是转化为求解一个线性代数方程组或超定线性代数方程组。但是由于该类问题的不适定性，导致最终转化成的线

性方程组的系数矩阵一般是病态矩阵，这给求近似解带来许多困难。为了避免这个问题，Backus 和 Gilbert 提出求第一类 Fredholm 积分方程近似解的一种方法。

考虑如下形式的第一类 Fredholm 积分方程：

$$\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{2.134}$$

其中 $k(x,t)$ 关于 x 连续，且在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 内有界。

令式(2.134)的 $\varphi(t)$ 的近似解为

$$\overline{\varphi(x)} = \int_0^1 A(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{2.135}$$

其中 $A(x,t)$ 称为平均核。

显然，当 $A(x,t) = \delta(x-t)$（$\delta(x)$ 为单位脉冲函数）时，$\overline{\varphi(x)} = \varphi(x)$。因此，我们可以粗略地讲，当 $A(x,t)$ 接近于 $\delta(x-t)$ 时，$\overline{\varphi(x)}$ 可以近似于 $\varphi(x)$。

下面讨论 $A(x,t)$ 的选取方法：

因为 $\int_0^1 \delta(x-t)\mathrm{d}t = 1$，所以对于平均核 $A(x,t)$ 也该满足类似的方程

$$\int_0^1 A(x,t)\mathrm{d}t = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{2.136}$$

为了设计一个准则来判断 $A(x,t)$ 与 $\delta(x-t)$ 的接近程度，我们根据 $\delta(x)$ 函数的特性和它的几何图形，可以得知 $A(x,t)$ 应在 $x=t$ 有一个主峰值，并且 $A(x,t)$ 主峰值的宽度（即 $A(x,t)$ 的谱）要充分地窄（如图 2.1 所示）。但是，如何定义 $A(x,t)$ 的谱？它的定义可以多种多样，这里为方便起见，$A(x,t)$ 的谱定义为

$$Q(x,A) = \alpha_J \int_0^1 J(x-t)A^2(x,t)\mathrm{d}t \tag{2.137}$$

其中 $J(x)$ 为关于 $x=0$ 点的凹函数，且 $J(0)=0$，α_J 是一个单位化常数。

$$\alpha_J = w\left[\int_0^1 J(x-t)A_w^2(x,t)\mathrm{d}t\right]^{-1}$$

其中
$$A_w(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{w}, & |x-t|<\dfrac{w}{2} \\ 0, & 其它\end{cases} \quad (w>0)$$

显然当 $A(x,t)$ 取为 $A_w(x,t)$ 时，$Q(x,A)=w$。

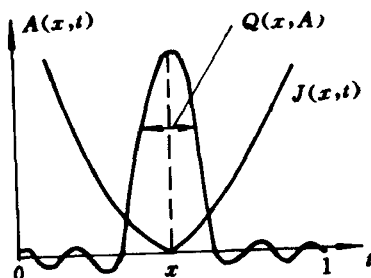


图 2.1 $A(x,t)$ 示意图

$J(x)$ 可取 $|x|, x^2, x^4$ 等。但是当 $J(x)$ 选定后，$A(x,t)$ 的主峰值的宽度越窄，则 $Q(x,A)$ 越小。因此，$A(x,t)$ 的选择原则是使得 $Q(x,A)$ 达到最小值的函数。

为了从给定的一些离散点 $(x_i, f(x_i))(i=1,2,\cdots,N)$ 上

$$\int_0^1 k(x_i,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x_i), \quad i=1,2,\cdots,N \tag{2.138}$$

来确定 $\varphi(x)$，我们假设

$$\overline{\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{N} a_i(x) f(x_i) \tag{2.139}$$

其中 $\{a_j(x)\}$ 为未知的函数列，将式(2.138)代入式(2.139)，得

$$\begin{aligned}\overline{\varphi(x)} &= \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\int_0^1 k(x_i,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{N} a_i(x) k(x_i,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.140}$$

比较式(2.140)与(2.135)得

$$A(x,t)=\sum_{i=1}^{N}a_i(x)k(x_i,t) \tag{2.141}$$

为了求得最优解，我们对每个 x 求 $Q(x,A)$ 满足式(2.136)的最小值。将式(2.141)代入式(2.137)和(2.136)得

$$Q(x,A)=\boldsymbol{a}^T(x)K(x)\boldsymbol{a}(x) \tag{2.142}$$

和

$$\boldsymbol{a}(x)\cdot\boldsymbol{b}=\varphi \tag{2.143}$$

其中

$$\boldsymbol{a}(x)=\begin{bmatrix}a_1(x)\\a_2(x)\\\vdots\\a_N(x)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\int_0^1 k(x_1,t)\mathrm{d}t\\\vdots\\\int_0^1 k(x_N,t)\mathrm{d}t\end{bmatrix}$$

$$K(x)=\begin{bmatrix}K_{11}&\cdots&K_{1N}\\&\cdots&\\K_{N1}&\cdots&K_{NN}\end{bmatrix}$$

$$K_{ij}=\alpha_j\int_0^1 J(x-t)k(x_i,t)k(x_j,t)\mathrm{d}t,\quad i,j=1,2,\cdots,N$$

从式(2.142)可以看出 $Q(x,A)$ 是一个关于 $\boldsymbol{a}(x)$ 的正定二次型，我们应用 Lagrange 乘数法求 $Q(x,A)$ 满足式(2.143)的最小值。

用 Lagrange 乘数法作一个辅助函数

$$Q_\lambda(x,A)=\boldsymbol{a}^T(x)K(x)\boldsymbol{a}(x)+\lambda\boldsymbol{a}^T(x)\boldsymbol{b} \tag{2.144}$$

由 $\dfrac{\partial Q_\lambda}{\partial a_i}=0(i=1,2,\cdots,N)$ 得

$$2K(x)\boldsymbol{a}(x)+\lambda\boldsymbol{b}=0$$

因此

$$\boldsymbol{a}(x)=-\frac{1}{2}\lambda K^{-1}\boldsymbol{b} \tag{2.145}$$

将 $\boldsymbol{a}(x)$ 代入到式(2.143)得

$$\lambda = -2(b^T K^{-1} b)^{-1} \tag{2.146}$$

则

$$a(x) = \frac{K^{-1}(x)b}{b^T K^{-1} b} \tag{2.147}$$

把 $a(x)$ 代入到式(2.139)便得 $\varphi(x)$ 的近似解。

一般地，$K(x)$ 是一般非病态的对称矩阵，从而为求解式(2.134)提供一种较好的方法。这种方法的缺点是计算效率低，它对每点 x 都需要计算一个 $N \times N$ 矩阵的逆矩阵。因此，若需要求得 $\varphi(x)$ 在 N 个点处的近似值，则该方法需要计算 N 次 $N \times N$ 矩阵的逆矩阵。而一般的数值方法只需要计算一个 $N \times N$ 矩阵的逆矩阵。

如果 $\{f(x_i)\}$ 带有随机测量噪声，令 $\varphi(x)$ 在 x 点由于测量误差产生的方差为 $\sigma^2(x)$，则由式(2.139)得

$$\sigma^2(x) = a^T(x) E a(x) \tag{2.148}$$

其中 E 是 $\{f(x_i)\}$ 的协方差矩阵。

$a(x)$ 的确定问题可转化为求下列函数的最小值问题：

$$(1-s)Q(x,A) + s\sigma^2(x) \tag{2.149}$$

其中 $s \in (0,1)$ 为参数。

对固定的 s，应用前面类似的方法可以求得

$$a(x) = \frac{K_s^{-1}(x)b}{b^T K_s^{-1} b} \tag{2.150}$$

其中 $K_s(x) = (1-s)K(x) + sE$。

对于一般的第一类 Fredholm 积分方程

$$\int_S K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in S \tag{2.151}$$

其中 S 为 R^n 内的一个有界区域或 R^n 内的一块有界曲面，对应的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为 n 维体积分元或面积分元，Backus—Gilbert 方法的计算公式为

$$\varphi(\boldsymbol{x}) \approx \frac{\boldsymbol{f}K^{-1}(x)\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^T K^{-1}\boldsymbol{b}} \tag{2.152}$$

其中

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{x}_1) \\ f(\boldsymbol{x}_2) \\ \vdots \\ f(\boldsymbol{x}_N) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \int_S k(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ \vdots \\ \int_S k(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} \end{bmatrix}$$

$$K(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} K_{11} \cdots K_{1N} \\ \cdots \\ K_{N1} \cdots K_{NN} \end{bmatrix}$$

$$K_{ij} = \alpha_J \int_S J(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}) K(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{r}) k(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, N$$

$$J(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{r}} \text{ 或 } \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{r} \text{ 等}$$

$$\alpha_J = w\left[\int_S J(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}) A_w^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right]^{-1}$$

$$A_w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) = \begin{cases} \frac{1}{w}, & |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}| < \frac{w}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (w > 0)$$

2.4　病态线性方程组的解法

从上节讨论第一类 Fredholm 积分方程的数值方法知道，在许多数值方法中最终都转化为线性代数方程组的求解问题。由于第一类 Fredholm 积分方程的不适定性导致线性代数方程也是不适定的，即为病态线性代数方程组。因此，在求解线性代数方程时不能采用一般的求解方法。本节将简单介绍解病态线性方程组的比较有效的四种方法。

2.4.1　利用 Householder 矩阵求解病态线性方程组

定义 5　形如 $H = 1 - 2uu^{+}$ 的矩阵称为 Householder 矩阵，

其中 I 为 n 阶单位矩阵，$u \in C^n$（n 维复空间），$^+$ 表示共轭转置。

不难验证，Householder 矩阵具有如下性质：

$$H^+ H = I, \quad H^+ = H, \quad H \cdot H = I, \quad |H| = -1$$

定理 8 对任意 $x, y \in C^n$，存在 Householder 矩阵 H，使得 $y = Hx$ 的充要条件为

$$\| y \| = \| x \|, \quad y^+ x \text{ 为实数} \tag{2.153}$$

证明 **必要性** 设 H 为 Householder 矩阵，且 $y = Hx$，则

$$\| y \| = \sqrt{y^+ y} = \sqrt{x^+ H^+ HX} = \sqrt{x^+ x} = \| x \|$$

$$y^+ x = x^+ H^+ x = x^+ Hx = x^+ y = (y^+ x)^+$$

即 $y^+ x$ 为实数。

充分性 若 $x = y$，则对任意使 $u^+ x = 0$ 且 $\| u \| = 1$ 的向量 u，由 $H = I - 2uu^+$ 构成的 Householder 矩阵都有 $y = Hx$。

若 $x \neq y$，因为 $\| y \| = \| x \|$，$y^+ x$ 为实数，令

$$u = \frac{x - y}{\| x - y \|}, \quad H = 1 - 2uu^+$$

则

$$Hx = x - 2\frac{(x - y)(x - y)^+}{(x - y)^+ (x - y)} x$$

$$= x - 2\frac{x^+ x - y^+ x}{2(x^+ x - y^+ x)}(x - y) = y$$

故定理结论成立。

在定理 8 中取 y 为特殊的向量，便不难推得下列结论。

推论 对任意 $x \in C^n$ 时，必存在 Householder 矩阵 H，使得 $Hx = \alpha e_i$，其中 $\alpha = \pm \| x \|$，e_i 为 C^n 中第 i 个元素为 1，其它元素为零的列向量。

由上述定理的证明过程，不难求得 Householder 矩阵 H。

$$H = I - 2uu^+, \quad u = \frac{x - \alpha e_i}{\| x - \alpha e_i \|}, \quad \alpha = \pm \| x \|$$

定理 9 已知 $A \in C^{n \times n}$ 非奇异矩阵，$b \in C^n$ 非零向量，H 为

Householder 矩阵，且 $Hb=\alpha e_n(\alpha=\pm\|b\|)$，令 $HA=LQ$，L 为下三角矩阵，Q 为酉矩阵，则 Q^+ 的第 n 列构成的向量平行于方程组

$$Az=b \tag{2.154}$$

的解向量 z。

证明　令 $Q^+=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，L 阵的第 n 个对角线元素为 l_{nn}，则由 $HA=LQ$ 及 $Hb=\alpha e_n$ 得

$$LQz=HAz=Hb=\alpha e_n$$

$$Qz=L^{-1}\alpha e_n=\frac{\alpha}{l_{nn}}e_n$$

$$z=Q^{-}\frac{\alpha}{l_{nn}}e_n=\frac{\alpha}{l_{nn}}q_n$$

则定理证毕。

在该定理基础上可以构造多种算法，例如：

算法 I

(1) 构造一个 Householder 使得 $Hb=se_n$，即

$$u=\frac{b-se_n}{\|b-se_n\|} \tag{2.155}$$

其中　　$s=\pm\|b\|$，　$H=1-2uu^+$

(2) 对 $(HA)^+$ 作 QR 分解或对 HA 作 LQ 分解。

(3) 计算

$$\alpha=\frac{b_{\max}}{\alpha_{\max}^T q_n} \tag{2.156}$$

其中 $b_{\max}=\max\limits_{1\leq i\leq n}|b_i|$，$\alpha_{\max}^T$ 为 $b_{\max}$ 所对应的 A 矩阵的行向量，q_n 为 Q 的第 n 个列向量。

(4)
$$z=\alpha q_n \tag{2.157}$$

算法 II　在算法 I 中，求 α 的方法改为 $\min\limits_{\alpha}\|\alpha Aq_n-b\|^2$，不难求得 α 的最小值为

$$\alpha = \frac{\mathrm{Re}[b^+ Aq_n]}{q_n^+ A^+ Aq_n} \tag{2.158}$$

其它过程与算法 I 相同。

当 A 为实矩阵时，这两种算法对求解病态线性方程组的解精度估计可见文献[66]。

2.4.2　利用(常微分方程组的)稳态解求解病态线性方程组

本小节讨论的线性方程组为

$$Az = b \tag{2.159}$$

其中 A 为 $n \times n$ 阶对称正定矩阵。

考虑一个常微分方程组

$$Cz'(t) = -Az(t) + b \tag{2.160}$$

其中 C 为 $n \times n$ 阶对称正定矩阵。

则微分方程组(2.160)的解为

$$z(t) = e^{-C^{-1}At}z(0) + \int_0^t e^{-C^{-1}A(t-\tau)}C^{-1}b\mathrm{d}\tau$$

其中

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \cdots$$

并且可以证明

$$\lim_{t\to\infty} z'(t) = 0$$

则当 $t \to \infty$ 时，$z(t)$ 收敛于线性方程组的解。

这说明当 t 充分大时，可以用 $z(t)$ 作为线性方程组的近似解。

求解式(2.159)的一类迭代格式

$$(1)\quad \begin{cases} z_{n+1}^{(0)} = z_n + 2x_n \\ x_{n+1} = p(-\varepsilon C^{-1}Az_{n+1}^{(0)} + \varepsilon C^{-1}b + x_n) \\ z_{n+1} = z_n + x_n + x_{n+1} \end{cases} \tag{2.161}$$

其中 x_n, z_n 为 n 维向量，$x_0 = \dfrac{h}{2}(-C^{-1}Az_0 + C^{-1}b)$，$z_0$ 为初始迭代向量，h 为时间步长参数，$p = \dfrac{h}{h+2\varepsilon}$，$\varepsilon$ 为参数。

如果令 $A=-E+D-F$，其中 D 为 A 的对解线元素，E,F 分别为下三角形和上三角形矩阵，并且在上式格式中采用 Seidel 技巧，便可得解方程组的迭代格式

$$
(2)\qquad \begin{cases} z_{n+1}^{(0)}=z_n+2x_n \\ x_{n+1}=p(-\varepsilon C^{-1}Fz_{n+1}^{(0)}-\varepsilon C^{-1}Dz_{n+1}^{(0)} \\ \qquad\qquad +\varepsilon C^{-1}Ez_{n+1}+\varepsilon C^{-1}b+x_n) \\ z_{n+1}=z_n+x_n+x_{n+1} \end{cases} \qquad (2.162)
$$

当取 $C=I$ 单位矩阵时，可以得到关于迭代格式的收敛性定理。

定理 10　设 A 为对称正定矩阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的全部特征值，只要选取 $\varepsilon\leqslant\frac{1}{\lambda}(\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i)$，则格式(1) 对于 $0<h<\infty$(即 $0<p<1$) 都收敛。

定理 11　设 A 为对称正定矩阵，只要选取 $\varepsilon>0$ 充分小，则格式(2) 对于 $0<h<\infty$(即 $0<p<1$) 都收敛。

在格式(2) 中选取 $C=2D$，　$\varepsilon=1$，　$p=\frac{h}{h+2}$，　$x_0=\frac{h}{4}D^{-1}(b-Az_0)$，则可得如下一个具体的计算格式：

$$
\begin{aligned}
&z_{n+1}^{(0)}=z_n+2x_n \\
&x_{n+1}=p(\frac{1}{2}D^{-1}Fz_{n+1}^{(0)}-\frac{1}{2}z_{n+1}^{(0)}+\frac{1}{2}D^{-1}Ez_{n+1} \\
&\qquad\quad +\frac{1}{2}D^{-1}b+x_n) \\
&z_{n+1}=z_n+x_n+x_{n+1}
\end{aligned}
$$

关于收敛性定理的证明及计算实例见文献[44]，计算程序见文献[59]。

2.4.3　求解病态线性方程组的正则化方法

设线性方程组为

$$Az = b, \quad b \in C^n \tag{2.163}$$

其中 A 为 n 阶退化矩阵，右端 b 的向量满足方程组的可解条件，即 $\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(A,b)$，令 F_A 为方程组的全部解所构成的集合，$z' \in C^n, z^0 \in C^n$，若

$$\| z^0 - z' \| = \inf_{z \in F_A} \| z - z' \|$$

则 z^0 称为相对于向量 z' 的方程组(2.163)的正规解。显然，正规解是被单值决定的。

可以证明，当 A 和 b 带有一定的微小误差时，方程组(2.163)的正规解不稳定，即代替 A 和 b 而给出其 δ 近似值 $\widetilde{A}$ 和 $\bar{b}$：

$$\| \widetilde{A} - A \| \leqslant \delta, \quad \| \bar{b} - b \| \leqslant \delta$$

其中 $\| A \| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}$，$\| b \| = \sqrt{\sum_i |b_i|^2}$，而 $\| \tilde{z} - z^0 \|$ 可以任意大。$\tilde{z}$ 为 $\widetilde{A}z = \bar{b}$ 的正规解。

下面讨论求解式(2.163)的正规解的稳定性方法。

(1) 假设方程组

$$Az = \bar{b} \tag{2.164}$$

来代替精确的退化方程组 $Az = \bar{b}$，这里 $\| \bar{b} - \bar{b} \| \leqslant \delta$，并且 $\bar{b}$ 可以不满足可解条件。

所以，方程组(2.164)的近似正规解是在满足 $\| \bar{b} - \bar{b} \| \leqslant \delta$ 的向量 z 中寻求，并且使(按正规解的定义)泛函 $\Omega(z) = \| z - z' \|^2$ 达到极小值。由于泛函 $\Omega(z) = \| z - z' \|^2$ 是稳定且拟单调的，故上述极小值问题等价于在满足条件 $\| Az - \bar{b} \| = \delta$ 的向量 z 的集合上求此泛函的极小值。则它可以化为使下列展开泛函极小化的向量 z^a：

$$M^a[z, \bar{b}, A] = \| Az - \bar{b} \|^2 + \alpha \| z - z' \|^2, \quad \alpha > 0 \tag{2.165}$$

其中参数 α 是由条件 $\| Az - \bar{b} \| = \delta$(即误差)确定的。

不难发现，这个唯一的向量 z^α 由下列方程组确定：

$$(A^+ A + \alpha I)z^\alpha = A^+ \bar{b} + \alpha z' \tag{2.166}$$

用 U_A 来表示向量 $z(z \in C^n)$ 的象的线性子空间，即

$$U_A = \{b | b = Az, z \in C^n\}$$

设 $\widetilde{V}_A$ 为向量 $\bar{b}$ 对 U_A 的投影，显然

$$\| \bar{b} - \widetilde{V}_A \| \leqslant \| \bar{b} - Az \|$$

定理 12 设泛函 $M^\alpha[z, \bar{b}, A]$ 达到极小值的向量 z^α，当 $\alpha \to 0$ 时收敛于方程组 $Az = \widetilde{V}_A$ 的正规解 $\bar{z}_0$。

该定理说明了当 $\delta \to 0$ 时，$z^{\alpha(\delta)}$ 性态的渐近特性。

(2) 假设方程组

$$\widetilde{A}z = \bar{b} \tag{2.167}$$

式中 $\| \widetilde{A} - A \| \leqslant \delta$，$\| \bar{b} - b \| \leqslant \delta$，向量 b 满足可解条件，且 z^0 为方程式 $Az = b$ 的正规解。

与上述讨论方法类同，求方程式(2.167)的稳定性解可以归结为下列泛函极小值问题：

$$M^\alpha[z, \bar{b}, \widetilde{A}] = \| \widetilde{A}z - \bar{b} \|^2 + \alpha \Omega[z] \tag{2.168}$$

其中参数值 α 是由条件 $\| \widetilde{A}z^\alpha - \bar{b} \| = \delta$ 确定，$\Omega[z] = \| z \|^2$。

使泛函 $M^\alpha[z, \bar{b}, \widetilde{A}]$ 取极小值的唯一元素 $\widetilde{z}^\alpha$ 由方程组

$$(\widetilde{A}^+ \widetilde{A} + \alpha I)\widetilde{z}^\alpha = \widetilde{A}^+ \bar{b} \tag{2.169}$$

确定 $\widetilde{z}^\alpha$ 与 z^0 之间有下列关系：

定理 13 设 $\widetilde{A}$ 和 $\bar{b}$ 是矩阵 A 和向量 b 的 δ 近似，而 $\beta(\delta)$ 和 $\alpha_0(\delta)$ 为任意的正连续函数，当 $\delta \to 0$ 时，它们单调趋向于零，且满足

$$\frac{\delta^2}{\beta(\delta)} \leqslant \alpha_0(\delta) \tag{2.170}$$

则对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta_0(\varepsilon, \| z^0 \|) > 0$，当 $0 < \delta < \delta_0$，α 满足条件

$$\frac{\delta^2}{\beta(\delta)} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0(\delta)$$

时，有

$$\|\tilde{z}^{\alpha}-z^{0}\|\leqslant\varepsilon$$

注 1 这定理证实了虽然不能知道精确的 A、b，而只能已知它们的近似值 $\tilde{A}$、$\tilde{b}$，但我们可以取 $\tilde{z}^{\alpha}$ 作为 $Az=b$ 的近似正规解。

注 2 稳定性函数 $\Omega(z)$ 也可取为下列形式：

$$\Omega(z)=(z-z_0')^{+}B(z-z_0') \tag{2.171}$$

其中 B 为 Hermite 正定矩阵，z' 与正规解定义中意义相同。

根据正则参数的选取方法，可以建立下列数值计算步骤：

(1) 选取单调趋于零的数列 $\{\alpha_k\}$。

(2) 对每个 α_k 求泛函 $M^{\alpha}[z,\tilde{b},\tilde{A}]$ 或 $M^{\alpha}[z,b,\tilde{A}]$ 极小化的向量 $\tilde{z}^{\alpha}$ 或 z^{α}，即求线性方程组(2.169)或(2.167)之解。

(3) 计算误差 $\|\tilde{A}z^{\alpha}-\tilde{b}\|$ 或 $\|A\tilde{z}-\tilde{b}\|$，并判别是否满足精度要求。

2.4.4 求解病态线性方程组的一种迭代方法

本节将利用正则化方法原理建立在摄动量下的迭代方法。

已知，线性方程组

$$Az=b \tag{2.172}$$

其中 $A\in C^{n\times n}$ 非奇矩阵，$b\in C^{n}$。

给定初始猜测向量 z^0，求待定扰动向量 δz^0，使得 $z^0+\delta z^0$ 为上述方程组的解，即

$$A(z^0+\delta z^0)=b$$

所以 δz^0 由下列方程组确定：

$$A\delta z^0=-(Az^0-b) \tag{2.173}$$

当原方程组病态时，关于 δz^0 应用正则化方法来确定。

建立如下关于 δz^0 的泛函极小值问题：

$$M[\delta z]=\|A\delta z+Az_0-b\|^2+\alpha\Omega(\delta z) \tag{2.174}$$

其中稳定性函数 $\Omega(\delta z)$ 选取为 $\|\delta z\|^2$，$\alpha(>0)$ 为正则化参数。

使泛函 $M[\delta z]$ 取得极小值的唯一元素 δz^0，由下列方程组确定：

$$(A^+ A + \alpha I)\delta z^0 = A^+ (b - Az^0)$$

即
$$\delta z^0 = (A^+ A + \alpha I)^{-1} A^+ (b - Az^0)$$

则原方程组的近似解为

$$\begin{aligned} z &= z_0 + (A^+ A + \alpha I)^{-1} A^+ (b - Az^0) \\ &= Nz_0 + (A^+ A + \alpha I)^{-1} A^+ b \end{aligned} \tag{2.175}$$

其中 $N = I - (A^+ A + \alpha I)^{-1} A^+ A$。

在此基础上，可以建立如下求解原方程组的迭代算法：

$$z_{n+1} = Nz_n + (A^+ A + \alpha I)^{-1} A^+ b \tag{2.176}$$

定理 14 对任意 $\alpha > 0$，上述构成的迭代序列 $\{z_n\}$ 一定收敛于下列方程组之解：

$$A^+ Az = A^+ b \tag{2.177}$$

证明 因为 A 为非奇矩阵，则 $A^+ A$ 为 Hermite 正定矩阵。假设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 $A^+ A$ 的特征值，则存在酉矩阵 T，使得

$$A^+ A = T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} T$$

而
$$\begin{aligned} N &= 1 - (A^+ A + \alpha I)^{-1} A^+ A = I \\ &- \left[T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} T + \alpha I \right]^{-1} T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} T \\ &= T^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha}{\lambda_1 + \alpha} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{\alpha}{\lambda_n + \alpha} \end{bmatrix} T \end{aligned}$$

所以对任意 $\alpha > 0$，N 的特征值都在 $(0,1)$ 之间，故迭代序列 $\{z_n\}$ 收敛。假设 $\{z_n\}$ 收敛于 z^*，则有

$$z^* = [I - (A^+ A + \alpha I)^{-1} A^+ A] z^* + (A^+ A + \alpha I)^{-1} A^+ b$$

化简得

$$A^+ A z^* = A^+ b$$

关于定理 14 的几点说明：

(1) 实质上，$\{z_n\}$ 收敛于 $Az = b$ 的最小二乘解，即使得 $\| Az - b \|^2$ 达到极小值的解，所以当方程组为超定线性代数方程组时，上述迭代过程仍能适用。

(2) 在保证 $(A^+ A + \alpha I)$ 非病态的情况下，α 选取得越小，矩阵 N 的特征值越小，从而 z_n 的收敛速度越快。

(3) 我们知道，当 A 为实对称正定矩阵，且病态时，则 $A^+ A$ 的病态性越严重。在这种情况下，应采用下列迭代过程：

$$z_{n+1} = [I - (A + \alpha I)^{-1} A] z_n + (A + \alpha I)^{-1} b, \quad \alpha > 0$$

且 $\{z_n\}$ 收敛于 $Az = b$ 的解。

第三章 PST 与 GPST 技术

脉冲谱技术(PST)是首先由 Tsien 和 Chen 在研究一维流体动力学的流体速度的逆问题(即一维波动方程的波速逆问题)时提出来的,后来 Chen 和他的课题组成员应用 PST 方法研究了许多类型的逆问题,并发展成为一般的脉冲谱技术(GPST)。

为了要识别某一物体(系统)的某些参数,如 $\alpha(x),\beta(x),\cdots$,可以向该物体(系统)发射某些信息(即给系统一个输入信号,例如声脉冲),该信息将通过该物体传播出去或者通过界面反射。如果通过接收装置将这些传播信息或反射信息测量得到,我们便可通过这些信息分析,推算出待求的参数 $\alpha(x),\beta(x),\cdots$。这个问题的示意图如图 3.1。

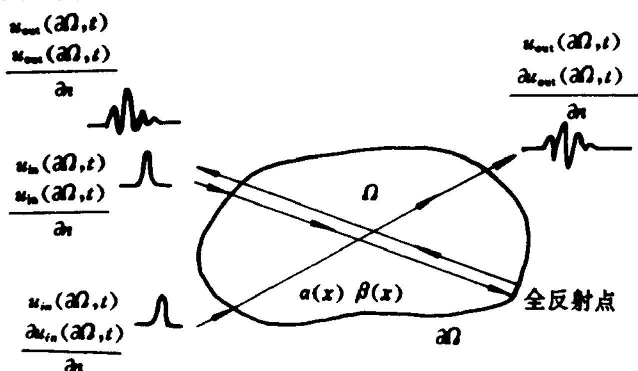


图 3.1 脉冲谱技术示意图

图中

$u_{in}(\partial\Omega,t)$ 是边界 $\partial\Omega$ 上的已知输入脉冲信号；

$u_{out}(\partial\Omega,t)$ 是边界 $\partial\Omega$ 上的可测量的输出脉冲信号；

$\dfrac{\partial u_{in或out}(\partial\Omega,t)}{\partial n}$ 是可测量的脉冲信号；

$\alpha(x),\beta(x),\cdots$ 是待求的未知量。

PST(或 GPST) 的基本思想：数据信息(输入信号，输出信号)是在时间域中给出，而综合分析(确定未知量)是在复频率域中进行，这就是脉冲谱技术中的“谱”的来历。

数据处理过程的框图如图 3.2。

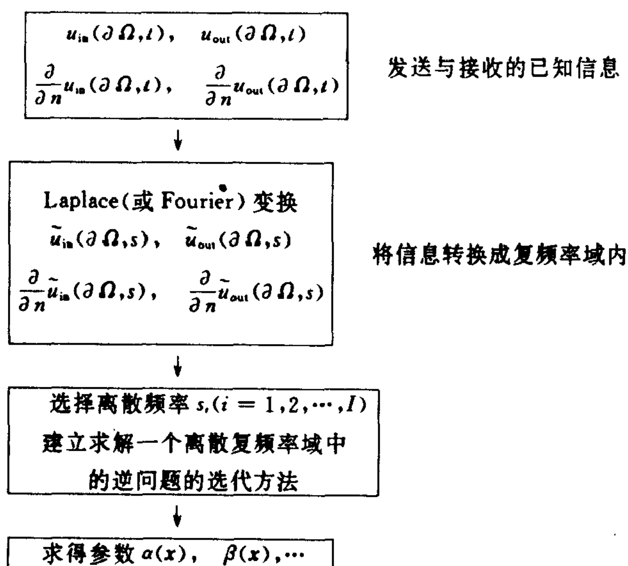


图 3.2

本章将讨论 PST 或(GPST) 处理一维、二维偏微分方程逆问题的数值方法。

3.1 一维扩散方程的热传导系数的逆问题

遥感有界杆的热传导系数的逆问题：为了确定杆的热传导系数 $k(x)$，可以通过求解下面的一维热传导方程的逆问题来实现。

考虑一维热传导方程的初边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \rho c\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \text{初始条件：} \quad u(x,0) = 0 \\ \text{边界条件：} \quad u(0,t) = f(t), \quad u(1,t) = g(t) \\ \text{附加条件：} \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = h(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $u(x,t)$ 为温度，$k(x)$ 为待定的热传导系数，ρ、c 分别为密度与比热，且为常数，$f(t)$、$g(t)$、$h(t)$ 为通过观测得到的数据，并且它们的 Fourier（或 Laplace）变换均存在。

待定热传导系数 $k(x)$ 的逆问题就是由已知方程式(3.1)，观测数据 $f(t)$、$g(t)$、$h(t)$ 及已知密度 ρ 与比热 c 来确定 $k(x)$。在实际问题中，$f(t)$、$g(t)$、$h(t)$ 三个函数通常只在有限个时间点 $t_j(j = 1,2,\cdots,J)$ 上取得测量值，并假设 $k(0)$、$k(1)$ 已知。

1. PST 迭代方法求解逆问题的过程

(1) 对式(3.1)中方程及已知条件取关于时间 t 的 Laplace 变换，从而把时间域内的逆问题化成复频率域内的逆问题。若记 $\tilde{u}(x,s)$，$\tilde{f}(s)$，$\tilde{g}(s)$，$\tilde{h}(s)$ 分别为 $u(x,t)$，$f(t)$，$g(t)$，$h(t)$ 的 Laplace 变换的象函数，则问题(3.1)转化为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right) - \rho c s \tilde{u} = 0 \quad 0 < x < 1 \\ \tilde{u}(0,s) = \tilde{\mathcal{J}}(s), \quad \tilde{u}(1,s) = \tilde{g}(s), \quad s \in \text{复平面} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\tilde{u}(0,s) = \tilde{h}(s) \end{cases} \tag{3.2}$$

从而逆问题变成由 $\rho, c, \tilde{\mathcal{J}}, \tilde{g}, \tilde{h}$ 来确定 $k(x)$。

(2) 迭代过程：

假设 $k_0(x)$ 为初始猜测，迭代的基本过程为

$$\begin{aligned} k_{n+1}(x) &= k_n(x) + \delta k_n(x) \\ \tilde{u}_{n+1}(x,s) &= \tilde{u}_n(x,s) + \delta \tilde{u}_n(x,s) \end{aligned}$$

$$(n = 0,1,2,\cdots) \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned} &|\delta k_n(x)| \ll |k_n(x)| \\ &|\delta \tilde{u}_n(x,s)| \ll |\tilde{u}_n(x,s)| \\ &\delta k_n(0) = \delta k_n(1) = 0 \end{aligned}$$

设 $(k_n(x), \tilde{u}_n(x,s))$ 为满足式(3.2)的一组解。

将式(3.3)代入式(3.2)中有：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left((k_n + \delta k_n)\dfrac{\partial(\tilde{u}_n + \delta \tilde{u}_n)}{\partial x}\right) - \rho c s(\tilde{u}_n + \delta \tilde{u}_n) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < 1 \\ \tilde{u}_n(0,s) + \delta \tilde{u}_n(0,s) = \tilde{\mathcal{J}}(s), \quad \tilde{u}_n(1,s) + \delta \tilde{u}_n(1,s) = \tilde{g}(s) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}_n(0,s) + \delta \tilde{u}_n(0,s)) = \tilde{h}(s) \end{cases}$$

$$\tag{3.4}$$

将上面的方程展开，忽略 $O(\delta^2)$ 项，并按 δ 的阶数(δ^0 阶与 δ^1 阶)将方程式(3.4)分裂成两个方程，边界条件也作相应的分裂，则可得到两个定解问题。一个是关于 $\tilde{u}_n$ 的定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k_n(x)\dfrac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\right) - \rho c s \tilde{u}_n = 0, \quad 0 < x < 1 \\ \tilde{u}_n(0,s) = \tilde{\mathcal{J}}(s), \quad \tilde{u}_n(1,s) = \tilde{g}(s) \end{cases} \tag{3.5}$$

另一个是关于 $\delta\tilde{u}_n$ 的定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k_n(x)\dfrac{\partial\delta\tilde{u}_n}{\partial x}\right)-\rho cs\delta\tilde{u}_n=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\delta k_n\dfrac{\partial\tilde{u}_n}{\partial x}\right), & 0<x<1\\ \delta\tilde{u}_n(0,s)=0, \quad \delta\tilde{u}_n(1,s)=0\end{cases} \tag{3.6}$$

应用数学物理方法中的Green 函数法，式(3.6)的定解问题的解可表达为

$$-\int_0^1 G_n(x,x',s)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\delta k_n(x')\frac{\partial\tilde{u}_n}{\partial x'}\right)\mathrm{d}x'=\delta\tilde{u}_n(x,s) \tag{3.7}$$

其中 $G_n(x,x',s)$ 为算子

$$L_n=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_n(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)-\rho cs$$

满足齐次边界条件的 Green 函数，即

$$\begin{cases}L_nG_n(x,x',s)=\delta(x-x')\\ G_n(0,x',s)=G_n(1,x',s)=0\end{cases} \tag{3.8}$$

将式(3.7)分部积分得

$$\delta\tilde{u}_n(x,s)=-G_n(x,x',s)\delta k_n(x')\frac{\partial\tilde{u}_n}{\partial x'}\bigg|_0^1+\int_0^1\frac{\partial G_n(x,x',s)}{\partial x'}\frac{\partial\tilde{u}_n}{\partial x'}\delta k_n(x')\mathrm{d}x'$$

利用 $\delta k_n(0)=\delta k_n(1)=0$，再将等式两边对 x 求导

$$\frac{\partial\delta\tilde{u}_n}{\partial x}=\int_0^1\frac{\partial^2G_n(x,x',s)}{\partial x\partial x'}\frac{\partial\tilde{u}_n}{\partial x'}\delta k_n(x')\mathrm{d}x'$$

为了加速收敛，将 $\delta\tilde{u}_n$ 近似地表示为：$\delta\tilde{u}_n=\tilde{u}_{n+1}-\tilde{u}_n\approx\tilde{u}-\tilde{u}_n$。令 $x=0$，并利用附加条件得

$$\tilde{h}(s)-\frac{\partial\tilde{u}_n(0,s)}{\partial x}=\int_0^1\frac{\partial^2G_n(0,x',s)}{\partial x\partial x'}\frac{\partial\tilde{u}_n}{\partial x'}\delta k_n(x')\mathrm{d}x'$$

从而有

$$b_n(s)=\int_0^1 a_n(x',s)\delta k_n(x')\mathrm{d}x' \tag{3.9}$$

其中

$$b_n(s) = \tilde{h}(s) - \frac{\partial \tilde{u}_n(0,s)}{\partial x}$$

$$a_n(x',s) = \frac{\partial^2 G_n(0,x',s)}{\partial x \partial x'} \frac{\partial \tilde{u}_n(x',s)}{\partial x'}$$

这是关于 $\delta k_n(x)$ 的第一类 Fredholm 积分方程，由此方程可解得 $\delta k_n(x)$。

为了求得式(3.3)中的数值解，将式(3.9)式在 $s = s_i(i = 1,2,\cdots,I)$ 个节点上离散。对于右边的积分，$x' = x_j'(j = 1,2,\cdots,J)$ 个节点上利用任何一种数值积分公式展开，即

$$\int_0^1 a_n(x',s)\delta k_n(x')\mathrm{d}x' = \sum_{j=1}^{n} w_j a_n(x_j',s)\delta k_n(x_j')$$

其中 w_j 为数值积分的权因子，故式(3.9)可离散成一线代数方程组

$$A_n Y_n = F_n \tag{3.10}$$

其中

$$Y_n = (\delta k_n(x_1'),\delta k_n(x_2'),\cdots,\delta k_n(x_J'))^T$$

$$F_n = (b_n(s_1),b_n(s_2),\cdots,b_n(s_I))^T$$

$$A_n = (a_{i,j}^n)_{I\times J}$$

$$a_{i,j}^n = w_j a_n(x_j,s_i),\quad i = 1,2,\cdots,I,\quad j = 1,2,\cdots,J$$

由于第一类 Fredholm 积分方程式(3.9)的不适定性，因此，方程式(3.10)一般也是病态方程，求解方法要采用第二章介绍的方法来处理。

PST 迭代方法的基本过程计算框图如图 3.3。

2. 关于 PST 方法的几点说明

(1) 用上述类似的方法，很容易处理下列一维波动方程的逆问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \rho c\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \text{初始条件：} \quad u(x,0) = \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \\ \text{边界条件：} \quad u(0,t) = f(t), \quad u(1,t) = g(t) \\ \text{附加条件：} \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = h(t) \end{cases}$$

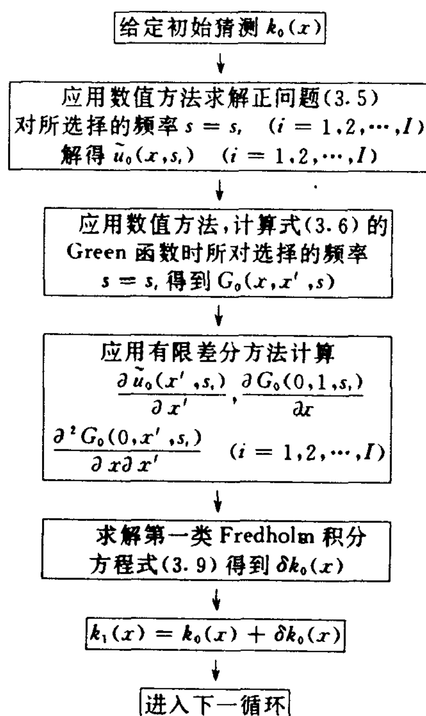


图　3.3

需要确定参数 $k(x)$：

上述波动方程的逆问题在复频域内的形式为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial\tilde{u}(x,s)}{\partial x}\right)-\rho cs^2\tilde{u}(x,s)=0, & 0<x<1\\ \tilde{u}(0,s)=\tilde{f}(s), \quad \tilde{u}(1,s)=\tilde{g}(s)\\ \dfrac{\partial\tilde{u}(0,s)}{\partial x}=\tilde{h}(s)\end{cases}$$

其中 $\tilde{u},\tilde{f},\tilde{g},\tilde{h}$ 分别为 $u(x,t),f(t),g(t),h(t)$ 的 Laplace 变换。

不难看出，上述问题的形式与式(3.2)是完全相似的。所以，可以用同样的方法处理，这正是 PST 的优点之处。

(2) 频率 $s=s_i$ 的选取原则。

我们知道，复频率 s 的选择必须取那些使得 $\tilde{u},\tilde{f},\tilde{g},\tilde{h}$ 都有意义的复频率，而这可选择的复频率是无限多个，我们只能选择有限多个。若复频率的元素个数选的过多，这一方面增加许多计算工作量，另一方面相应的离散后的线性代数方程组的条件数将急骤增大，从而影响重构的精度。如果复频率的个数选的太少，重构的解也将不精确。计算实践表明，I 的大小取在 $N<I<2N$（N 为重构 $k(x)$ 的总分点数，即线性代数方程组未知量的个数）比较适宜，而 s_i 的取值一般为自然数。

若 s_i 选纯虚数，则对偏微分方程取 Laplace 变换可视为对偏微分方程取 Fourier 变换。由于一般函数的频域内具有振荡特性，这对求解逆问题的精度带来了许多困难，因此，一般 PST 方法都在复频域内考虑。

(3) Green 函数 $G_n(x,x',s)$ 的数值计算应当尽量避免。在上面考虑的逆问题中，若 $\tilde{g}(s)=0$，则式(3.9)可化简为

$$\int_0^1\left(\frac{\partial\tilde{u}_n(x',s)}{\partial x'}\right)^2\delta k_n(x')\mathrm{d}x' = k_n(0)\tilde{f}(s)\left(\frac{\partial\tilde{u}_n(0,s)}{\partial x}-\tilde{h}(s)\right) \tag{3.11}$$

这样避免了 Green 函数的计算困难。

(4) 关于待定参数的边界条件问题。

在本节中我们又补充了关于待定参数的一个条件：即 $\delta k_n(0) = \delta k_n(1) = 0$。这表明在迭代的每一次循环中 $\delta k_n(x)$ 在端点处应保持不动。这意味着：关于 $k(x)$ 的初始猜测应当具有 $k_0(0) = k(0)$，$k_0(1) = k(0)$，这一条件的补充可以从几个方面去理解：

① 积分方程中的未知函数 $\delta k_n(0)$ 出现在微分号下，因此为了使解唯一必须加一边界条件。

② 偏微分方程式(3.1)中如果把 $k(x)$ 视为未知函数，那么这是关于 $k(x)$ 的一阶微分方程，应当加上一个(初)边界条件。

这一附加的条件意味着一个端点处的热传导系数应当是已知的。如果我们能够给出两个端点的热传导系数，从数学的角度，条件给多了，可能没有解。而在应用中，如果给出的这些条件不是错误的，那么条件给的多，会为求解提供更多的信息，其解的精度将相应地提高。

应当指出，这个条件并非是 PST 迭代方法的必要条件。我们可以直接处理式(3.7)的积分方程，这样，便可避免这个条件。

(5) 每次迭代的计算工作量为：计算 I 次正问题 + 计算 1 次 Green 函数 + 计算 1 次积分方程数值解。

3. 计算实例

为了检验 PST 迭代方法的可行性，进行数值模拟计算是十分必要的，因为 $f(t)$，$g(t)$ 的选择不同不会影响数值迭代过程。因此，为了方便起见，我们选择 $g(t) = 0$，$f(t) = 1(t > 0)$，$h(t)$ 由方程式(3.1)确定，则 $\tilde{g}(s) = 0$，$\tilde{f}(s) = \dfrac{1}{s}$，$\tilde{h}(s) = -\dfrac{\operatorname{cth}\sqrt{s}}{\sqrt{s}}$。

对每一个 $k_n(x)$，式(3.5)求解采用二阶有限差分格式来解决，步长取 0.1。对第一类 Fredholm 积分方程式(3.11)采用梯形积分公式来离散化，步长取 0.1。此外，复频率 s_i 选取为 1，2，…，11。精确的扩散系数 $k^*(x) = 1$。

对 6 个不同的初始猜测函数 $k_0(x)$，重构的 $k(x)$ 的计算结果

见图 3.4(*a*) ～ (*f*)。$\| k^*(x) - k_0(x) \|_2$ 和 $\| k^*(x) - k_n(x) \|_2$ 精确情况见表 3.1。

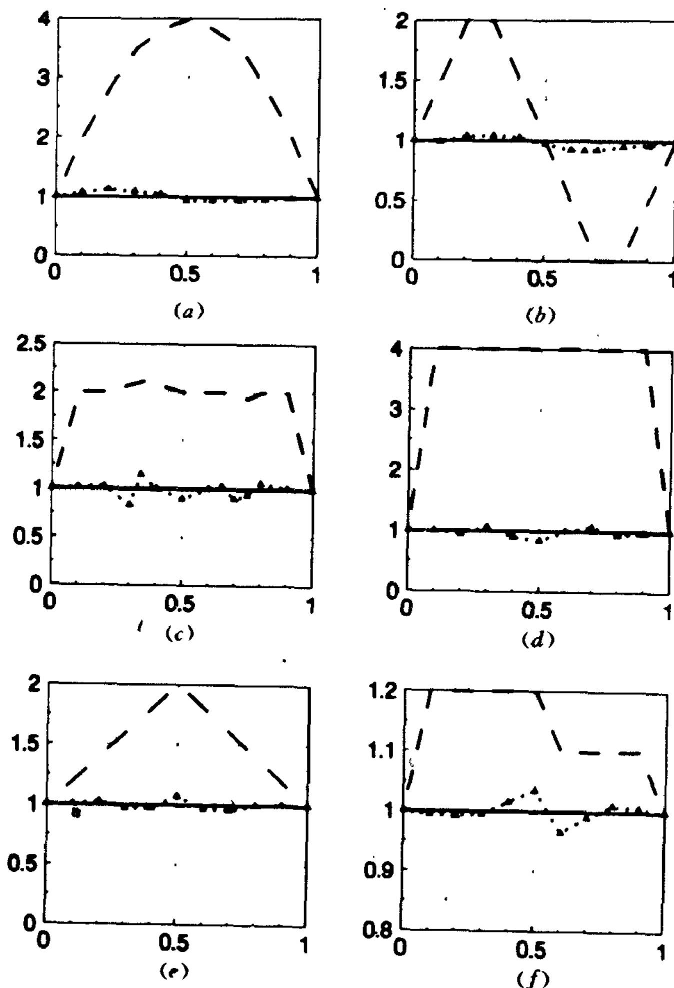


图 3.4

实线为 $k^*(x)$，虚线为 $k_0(x)$ 带点虚线为 $k(x)$

表　3.1

图　号	迭代次数	$\|k^*(x) - k_0(x)\|_2$	$\|k^*(x) - k_n(x)\|_2$
(a)	5	6.928	0.355
(b)	7	2.236	0.138
(c)	14	3.830	0.291
(d)	10	9.000	0.361
(e)	10	1.844	0.187
(f)	10	0.490	0.056

3.2　Green 函数的数值计算

从上节关于 PST 迭代算法的过程可以看到：关键的一步是要计算 Sturm—Liouviller 算子的 Green 函数。对于 PST 迭代方法处理其它类型方程的逆问题也都需要计算某个偏微分方程的 Green 函数。本节将介绍应用有限差分法计算 Sturm—Liouviller 算子的 Green 函数。

考虑 Sturm—Liouviller 微分方程

$$\begin{cases} Lu = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)u = \delta(x - x_l), \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

其中 $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $x_l \in (0,1)$。

首先将求解区间剖分成有限个子区间：

设对区间[0,1]的剖分为：$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1, h_i = x_i - x_{i-1}, x_{i-\frac{1}{2}} = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$。

然后，应用 Keller 盒式积分法进行离散化：

对式(3.12)在$[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$子区间进行积分得

$$-\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}q(x)u\mathrm{d}x=\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\delta(x-x_l)\mathrm{d}x$$

即

$$w(x_{i-\frac{1}{2}})-w(x_{i+\frac{1}{2}})+\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}qu\mathrm{d}x=\delta_{il} \tag{3.13}$$

其中 $$w(x)=p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\quad \delta_{il}=\begin{cases}1, & l=i\\0, & l\neq i\end{cases}$$

采用梯形积分公式得

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}qu\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}(h_i+h_{i-1})[q(x_{i+\frac{1}{2}})u(x_{i+\frac{1}{2}})\\&\quad+q(x_{i-\frac{1}{2}})u(x_{i-\frac{1}{2}})]\\&=\frac{1}{4}(h_i+h_{i-1})[q_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1}+(q_{i+\frac{1}{2}}+q_{i-\frac{1}{2}})u_i\\&\quad+q_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1}]\end{aligned} \tag{3.14}$$

其中 $$q_{i+\frac{1}{2}}=q(x_{i+\frac{1}{2}}),\quad u_i=u(x_i)$$

$w(x_{i-\frac{1}{2}})$、$w(x_{i+\frac{1}{2}})$ 按下列方法确定：

由$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{w(x)}{p(x)}(p(x)>0)$得

$$u(x_i)-u(x_{i-1})=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{w(x)}{p(x)}\mathrm{d}x=w(x_{i-\frac{1}{2}})\widetilde{p}_i$$

$$u(x_{i+1})-u(x_i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{w(x)}{p(x)}\mathrm{d}x=w(x_{i+\frac{1}{2}})\widetilde{p}_{i+1}$$

其中 $$\widetilde{p}_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\mathrm{d}x}{p(x)},\quad \widetilde{p}_{i+1}=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\mathrm{d}x}{p(x)}$$

将上式代入式(3.13)得

$$\frac{u_i-u_{i-1}}{\widetilde{p}_i}-\frac{u_{i+1}-u_i}{\widetilde{p}_{i+1}}+\frac{h_i+h_{i+1}}{4}[q_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1}+(q_{i+\frac{1}{2}}+q_{i-\frac{1}{2}})u_i+q_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1}]=\delta_{il}$$

整理得

$$a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = \delta_{il}, \quad i = 1,2,\cdots,n-1$$

其中

$$a_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{4} q_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\bar{p}_i}$$

$$b_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{4}(q_{i+\frac{1}{2}} + q_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{\bar{p}_i} + \frac{1}{\bar{p}_{i+1}}$$

$$c_i = \frac{h_i + h_{i-1}}{4} q_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\bar{p}_{i+1}}$$

注意到边值条件 $u_0 = u_n = 0$，得到下列三对角线性方程组：

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{1l} \\ \delta_{2l} \\ \vdots \\ \delta_{n-2l} \\ \delta_{n-1l} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

该线性方程组的解可由追赶法求得。则 Green 函数 $G(x,x')(0 < x < 1, 0 < x' < 1)$ 在离散点 (x_i,x_l) 处的数值 $G(x_i,x_l) = G_{il}$ 可由式(3.15)得到，对式(3.15)令 $l = 1,2,\cdots,n-1$，得

$$AG = E \tag{3.16}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$G = (G_{il})_{(n-1)\times(n-1)}$，$E$ 为 $n-1$ 阶单位矩阵。

从而有

$$G = A^{-1}$$

在等间距剖分或对式(3.14)采用矩形积分公式离散时,可以证明

$$G(x_i, x_l) = G(x_l, x_i)$$

这与该问题的 Sturm—Liouviller 算子的自共轭特性相一致。

从上述讨论可以看出:

(1) 矩阵 A 的特性(如三对角性)主要取决于算子 L;

(2) 方程式(3.16)的右端矩阵 E,仅当 x_l 的序号与式(3.15)未知量 x_i 的序号一致时,恰好为单位矩阵,在非齐次边界条件情况下,它一般不是单位矩阵。因此,矩阵 E 仅取决于边界条件和 x_l 的序号。

对于其它类型的算子或高维情况下的 Green 函数,它的计算方法也为

$$G = A^{-1}E$$

应当指出:应用 PST 迭代方法求解逆问题的数值解时,对 Green 函数的计算方法与每次求解正问题的计算方法在区域剖分和未知量排序号方面应采用一致的方法,这样能减少许多计算工作量。

3.3 改进的 PST 方法

从上节关于 Green 函数的数值计算不难发现:它的计算是非常困难的,由于涉及 δ-函数,因此它的计算精度难以保证。并且,Green 函数的数值计算精度直接影响到 PST 迭代算法的收敛速度。但在某些特殊的情况下,我们可以避免 Green 函数的数值计算工作,从而构成更加有效的 PST 迭代方法。

1. 一维情况

为了方便起见,假设经过 Laplace 变换后,关于 u_n、δu_n 的两个

偏微分方程的正问题分别为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k_n \dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right) - su_n = 0 \\ u_n^{(\alpha)}(0,s) = \widetilde{f}(s), \quad u_n^{(\beta)}(1,s) = \widetilde{g}(s) \end{cases} \tag{3.17}$$

及

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k_n \dfrac{\partial \delta u_n}{\partial x}\right) - s\delta u_n = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\delta k_n \dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right) \\ \delta u_n^{(\alpha)}(0,s) = \delta u_n^{(\beta)}(1,s) = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

附加条件为

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|_{x=0} = \widetilde{h}_1(s), \quad \left.\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|_{x=1} = \widetilde{h}_2(s) \tag{3.19}$$

这里 α、β 的取值为 0、1，表示不求导或求一阶偏导数。

式(3.18)化成等价的积分方程形式

$$\delta u_n = -\int_0^1 G_n(x,x',s)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\delta k_n \frac{\partial u_n}{\partial x'}\right)\mathrm{d}x'$$

右边利用分部积分，并左边用 $u - u_n$ 近似代替 δu_n 得

$$u(x,s) - u_n(x,s) = \int_0^1 \frac{\partial G_n(x,x',s)}{\partial x'}\frac{\partial u_n}{\partial x'}\delta k_n(x')\mathrm{d}x' \tag{3.20}$$

将上式两边对 x 求导，且乘以 $k_n(x)u_n(x,s)$，并依次令 $x=1$，$x=0$ 相减，则

$$左边 = \left.\frac{\partial(u-u_n)}{\partial x}k_n(x)u_n(x,s)\right|_0^1$$

$$右边 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x'}\left.\left[\frac{\partial G_n}{\partial x}k_n(x)u_n(x,s)\right]\right|_0^1 \frac{\partial u_n}{\partial x'}\delta k_n(x')\mathrm{d}x'$$

而 $\left.\left[\dfrac{\partial G_n}{\partial x}k_n(x)u_n(x,s)\right]\right|_0^1$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(k_n \frac{\partial G_n}{\partial x}\right)u_n\mathrm{d}x + \int_0^1 k_n \frac{\partial G_n}{\partial x}\frac{\partial u_n}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_n \frac{\partial G_n}{\partial x}\right) - sG_n\right]u_n\mathrm{d}x + \int_0^1 sG_n u_n\mathrm{d}x + \int_0^1 k_n \frac{\partial G_n}{\partial x}\frac{\partial u_n}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \delta(x - x')u_n(x,s)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(G_n k_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) - s u_n \right] G_n \right\} \mathrm{d}x$$

$$= u_n(x', s) + G_n(x, x', s) k_n(x) \frac{\partial u_n}{\partial x} \bigg|_0^1$$

如果第二项为零，则可得到关于 $\delta k_n(x)$ 的如下第一类 Fredholm 积分方程：

$$\frac{\partial (u - u_n)}{\partial x} k_n(x) u_n(x,s) \bigg|_0^1 = \int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x'} \right)^2 \delta k_n(x')\mathrm{d}x' \qquad (3.21)$$

要使第二项为零，即

$$G_n(x, x', s) k_n(x) \frac{\partial u_n}{\partial x} \bigg|_0^1 = 0 \qquad (3.22)$$

则只要下列条件之一成立即可。

(1) 边界条件： $u(0,s) = \tilde{f}(s)$， $u(1,s) = \tilde{g}(s)$

这时 $G_n(0,x',s) = G_n(1,x',s) = 0$

(2) 边界条件： $u(0,s) = \tilde{f}(s)$， $\dfrac{\partial u(1,s)}{\partial x} = 0$

这时 $G_n(0,x',s) = 0$， $\dfrac{\partial u_n(1,s)}{\partial x} = 0$

(3) 边界条件： $\dfrac{\partial u(0,s)}{\partial x} = 0$， $u(1,s) = \tilde{g}(s)$

这时 $\dfrac{\partial u_n(0,s)}{\partial x} = 0$， $G_n(1,x',s) = 0$

(4) 边界条件： $\dfrac{\partial u(0,s)}{\partial x} = 0$， $\dfrac{\partial u(1,s)}{\partial x} = 0$

这时 $\dfrac{\partial u_n(0,s)}{\partial x} = 0$， $\dfrac{\partial u_n(1,s)}{\partial x} = 0$

在上述四种情况下，关于 $\delta k_n(x)$ 的数值计算可以采用 2.3 节的方法得到，从而避免了 Green 函数的数值计算。

若待定参数是多参数情况，如 $\rho(x)$、$k(x)$ 为待定参数，则式 (3.17) 和 (3.18) 中的方程分别为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_n \frac{\partial u_n}{\partial x}\right) - s\rho_n u_n = 0 \qquad (3.17')$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_n \frac{\partial \delta u_n}{\partial x}\right) - s\rho_n \delta u_n = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta k_n \frac{\partial u_n}{\partial x}\right) + su_n\delta\rho_n \qquad (3.18')$$

完全类似地可推得

$$\frac{\partial(u-u_n)}{\partial x}k_n(x)u_n(x,s)\Big|_0^1 = \int_0^1\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\delta k_n(x) + u_n^2\delta\rho_n s\right]\mathrm{d}x$$

对多参数和一维波动方程的情况，避开 Green 函数的数值计算条件和单参数待定的情况相同。

2. 二维情况

考虑抛物线偏微分方程的逆问题

$$Au + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,\quad r\in\Omega,\quad t>0 \qquad (3.23)$$

其中

$$Au = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(r)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(r)\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

初始条件： $u(0,r) = 0,\quad r\in\Omega$

边界条件： $u|_{\partial\Omega_1} = f(r,t),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_2} = \varphi(r,t),\quad t>0$

附加条件： $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_3} = \psi(r,t),\quad \partial\Omega_3\subset\partial\Omega_1,\quad t>0$

对式(3.23)、边界条件及附加条件取 Laplace 变换得

$$Au + su = 0,\quad r\in\Omega \qquad (3.24)$$

边界条件： $u|_{\partial\Omega_1} = F(r,s),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_2} = \varphi(r,s) \qquad (3.25)$

附加条件： $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_3} = \Psi(r,s),\quad \partial\Omega_3\subset\partial\Omega_1 \qquad (3.26)$

其中 $L[u(r,t)] = u(r,s)L[f(r,t)] = F(r,s), L[\varphi(r,t)] = \varphi(r,s), L[\Psi(r,t)] = \Psi(r,s)$。

应用 PST 基本迭代格式，将问题分解成二个定解问题，其中一个是关于 u_n：

$$\begin{cases} A_n u_n + s u_n = 0 \\ u_n|_{\partial\Omega_1} = F(r,s), \quad \left.\dfrac{\partial u_n}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_2} = \varphi(r,s) \end{cases} \tag{3.27}$$

其中

$$A_n = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_n(r)\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_n(r)\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

而另一个是关于 δu_n：

$$\begin{cases} A_n\delta u_n + s\delta u_n = -\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\delta k_n\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\delta k_n\dfrac{\partial u_n}{\partial y}\right)\right] \\ \delta u_n|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial\delta u_n}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_2} = 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

对式(3.28)应用 Green 函数可表示成

$$\delta u_n(r) = -\iint_\Omega G_n(r,r')\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(\delta k_n(r')\frac{\partial u_n}{\partial x'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\delta k_n(r')\frac{\partial u_n}{\partial y'}\right)\right]\mathrm{d}\Omega_{r'} \tag{3.29}$$

其中 $G_n(r,r')(r'=(x',y'))$ 满足方程

$$\begin{cases} A_n G_n(r,r') + sG_n(r,r') = \delta(r-r') \\ G_n|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial G_n}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_2} = 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

为加速收敛，将式(3.29)近似改为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(u(r) - u_n(r))}{\partial n} \\ &= -\iint_\Omega \frac{\partial G_n(r,r')}{\partial n}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(\delta k_n\frac{\partial u_n}{\partial x'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\delta k_n\frac{\partial u_n}{\partial y'}\right)\right]\mathrm{d}\Omega_{r'} \\ &= -\iint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial G_n}{\partial n}\delta k_n\frac{\partial u_n}{\partial x'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial G_n}{\partial n}\delta k_n\frac{\partial u_n}{\partial y'}\right)\right]\mathrm{d}\Omega_{r'} \\ &\quad + \iint_\Omega\left[\frac{\partial^2 G_n}{\partial x'\partial n}\frac{\partial u_n}{\partial x'}\delta k_n + \frac{\partial^2 G_n}{\partial y'\partial n}\frac{\partial u_n}{\partial y'}\delta k_n\right]\mathrm{d}\Omega_{r'} \end{aligned}$$

$$
= -\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\frac{\partial u_n}{\partial n}\delta k_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'
$$

$$
+\iint_{\Omega_r}\left[\frac{\partial^2 G_n}{\partial x'\partial n}\frac{\partial u_n}{\partial x'}+\frac{\partial^2 G_n}{\partial y'\partial n}\frac{\partial u_n}{\partial y'}\right]\delta k_n \mathrm{d}\Omega_{r'} \tag{3.31}
$$

由附加条件(3.26)，上式可以作为计算 δk_n 的第一类 Fredholm 积分方程。

为了避免计算Green 函数，作如下处理：将式(3.31)两边乘以 $k_n(\boldsymbol{r})u_n(\boldsymbol{r})$，并沿 $\partial\Omega_1$ 作曲线积分，且注意到式(3.28)得

$$
\int_{\partial\Omega}k_n(\boldsymbol{r})u_n(\boldsymbol{r})\frac{\partial(u(\boldsymbol{r})-u_n(\boldsymbol{r}))}{\partial n}\mathrm{d}\boldsymbol{r}
$$

$$
= -\int_{\partial\Omega_1}\left[\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\frac{\partial u_n}{\partial n}\delta k_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right]k_n(\boldsymbol{r})F(\boldsymbol{r},s)\mathrm{d}\boldsymbol{r}
$$

$$
+\int_{\partial\Omega_1}k_n(\boldsymbol{r})u_n(\boldsymbol{r})\left[\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial^2 G_n}{\partial x'\partial n}\frac{\partial u_n}{\partial x'}\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{\partial^2 G_n}{\partial y'\partial n}\frac{\partial u_n}{\partial y'}\right]\delta k_n \mathrm{d}\Omega_{r'}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{3.32}
$$

等式右边第一项为

$$
I_1 = -\int_{\partial\Omega_1}\left[\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\frac{\partial u_n}{\partial n}\delta k_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right]k_n(\boldsymbol{r})F(\boldsymbol{r},s)\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{3.33}
$$

不难发现，当$u_n|_{\partial\Omega_1}=F(\boldsymbol{r},s)\equiv 0$ 或$k_n|_{\partial\Omega_1}=0$ 时，有 $I_1=0$。

等式右边第二项为

$$
I_2 = \int_{\partial\Omega_1}\left[\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial G_n}{\partial n}\right)\frac{\partial u_n}{\partial x'}\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial G_n}{\partial n}\right)\frac{\partial u_n}{\partial y'}\right]\delta k_n \mathrm{d}\Omega_{r'}\right]k_n(\boldsymbol{r})u_n(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}
$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(\int_{\partial\Omega_1} k_n(r) u_n(r) \frac{\partial G_n}{\partial n'} \mathrm{d}r \right) \frac{\partial u_n}{\partial x'} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\int_{\partial\Omega_1} k_n(r) u_n(r) \frac{\partial G_n}{\partial n} \mathrm{d}r \right) \frac{\partial u_n}{\partial y'} \right] \delta k_n(r') \mathrm{d}\Omega_{r'} \quad (3.34)$$

在上述关系式中

$$\int_{\partial\Omega_1} k_n(r) u_n(r) \frac{\partial G_n}{\partial n} \mathrm{d}r$$

$$= \int_{\partial\Omega_1 - \partial\Omega_2} k_n(r) u_n(r) \frac{\partial G_n}{\partial n} \mathrm{d}r$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_n \frac{\partial G_n}{\partial x} u_n \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_n \frac{\partial G_n}{\partial y} u_n \right) \right] \mathrm{d}\Omega_r$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_n \frac{\partial G_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_n \frac{\partial G_n}{\partial y} \right) \right] u_n \mathrm{d}\Omega_r$$

$$+ \iint_{\Omega} \left[k_n \frac{\partial G_n}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial x} + k_n \frac{\partial G_n}{\partial y} \frac{\partial u_n}{\partial y} \right] \mathrm{d}\Omega_r$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_n \frac{\partial G_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_n \frac{\partial G_n}{\partial y} \right) - sG_n \right] u_n \mathrm{d}\Omega_r$$

$$+ \iint_{\Omega} \left[k_n \frac{\partial G_n}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial x} + k_n \frac{\partial G_n}{\partial y} \frac{\partial u_n}{\partial y} - sG_n u_n \right] \mathrm{d}\Omega_r$$

$$= \iint_{\Omega} \delta(r - r') u_n(r) \mathrm{d}\Omega_r - \iint_{\Omega_r} [A_n u_n - s u_n] G_n \mathrm{d}\Omega_r$$

$$+ \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_n \frac{\partial u_n}{\partial x} G_n \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_n \frac{\partial u_n}{\partial y} G_n \right) \right] \mathrm{d}\Omega_r$$

$$= u_n(r') + \int_{\partial\Omega} k_n \frac{\partial u_n}{\partial n} G_n \mathrm{d}r$$

$$= u_n(r') + \int_{\partial\Omega_2} k_n \frac{\partial u_n}{\partial n} G_n \mathrm{d}r$$

在 $\partial\Omega_2$ 为空集或者$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_2} = 0$ 假设下，由式(3.34)得

$$I_2 = \iint_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial u_n(r')}{\partial x'} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_n(r')}{\partial y'} \right]^2 \right\} \delta k_n(r') \mathrm{d}\dot{\Omega}_{r'}$$

$$+ \int_{\partial\Omega_1} \left[\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 G_n}{\partial x' \partial n} \frac{\partial u_n}{\partial x'} + \frac{\partial^2 G_n}{\partial y' \partial n} \right) \delta k_n \mathrm{d}\Omega_{r'} \right] k_n(r) u_n(r) \mathrm{d}r \tag{3.35}$$

这时由式(3.31)最后得

$$\int_{\partial\Omega} k_n(r) u_n(r) \frac{\partial (u(r) - u_n(r))}{\partial n} \mathrm{d}r$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 \right] \delta k_n(r) \mathrm{d}\Omega_r$$

代入边界条件得

$$\int_{\partial\Omega} k_n(r) F_n(r,s) \left[\Psi(r,s) - \frac{\partial u_n}{\partial n} \right] \mathrm{d}r$$

$$= \iint_{\Omega_r} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 \right] \delta k_n(r) \mathrm{d}\Omega_r \tag{3.36}$$

从 $I_1 = 0$ 和式(3.35)成立的条件，可知式(3.36)成立的必要条件为所提出逆问题的边界条件和附加条件应满足下列条件之一：

(1) 边界条件： $u|_{\partial\Omega} = f(r,t)$

附加条件： $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \Psi(r,t)$

未知函数 $k(r)$ 在边界 $\partial\Omega$ 上已知。

(2) 边界条件： $u|_{\partial\Omega_1} = f(r,t)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_2} = 0$

附加条件： $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_1} = g(r,t)$

且未知函数 $k(r)$ 在边界 $\partial\Omega_1$ 上已知。

(3) 边界条件： $u|_{\partial\Omega} = 0$

附加条件： $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \Psi(r,t)$

(4) 边界条件： $u|_{\partial\Omega_1} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_2} = 0$

附加条件： $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_1} = g(r,t)$

上述四种情况在实际的逆问题中有时是容易办到的。

对于双曲型偏微分方程，我们仅需在式(3.24)中将 su 改为 s^2u，便可类似地进行讨论。

3.4 GPST 的数学方法的描述

考虑线性偏微分方程组的初边值问题：

$$\begin{cases} L(C(x),t)u(x,t) = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ Bu(x,t) = f(x,t), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ E(x,0) = g(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{3.37}$$

其中 u 为一向量函数，L 为矩阵微分算子，B 为矩阵边值条件算子，E 为矩阵初值算子，$C(x)$ 为待求向量函数，L 线性依赖于 $C(x)$，Ω 为区域，$\partial\Omega$ 为区域边界。

算子识别的一类逆问题可提为：从式(3.37)及下列附加的边界条件，来确定 L 算子中的未知参数 $C(x)$。

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \varphi(x,t), \quad x \in \partial\Omega' \tag{3.38}$$

其中 n 为法线方向导数，$\partial\Omega'$ 为边界 $\partial\Omega$ 的一部分或全部。

GPST 方法的第一步是将式(3.37)、(3.38) 关于变量 t 取 Laplace(或 Fourier) 变换，得

$$\begin{cases}\tilde{L}(C(x),s)U(x,s) = H(x,s), & x \in \Omega \\ \tilde{B}U(x,s) = F(x,s), & x \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial U(x,s)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \Phi(x,s), & x \in \partial\Omega'\end{cases} \tag{3.39}$$

其中，$\tilde{L},\tilde{B},U,F,\Phi$ 分别为 L,B,u,f,φ 的 Laplace 变换之象。

第二步：迭代过程，设

$$C_{n-1} = C_n + \delta C_n; U_{n+1} = U_n + \delta U_n, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{3.40}$$

其中 $C_0(x)$ 为初始猜测向量，并且假设 $\|\delta U_n\| \ll \|U_n\|$，$\|\delta C_n\| \ll \|C_n\|$。将式(3.40)代入式(3.39)并略去二阶增量项 $O(\delta^2)$，并按增量 δ 的阶数(δ^0,δ^1)分类得到二组定解问题，一组是关于 U_n 的微分方程

$$\begin{cases}\tilde{L}(C_n(x),s)U_n(x,s) = H(x,s), & x \in \Omega \\ \tilde{B}U_n(x,s) = F(x,s), & x \in \Omega\end{cases} \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{3.41}$$

另一组是关于 δU_n 的微分方程

$$\begin{cases}\tilde{L}(C_n(x),s)\delta U_n(x,s) = Z(x,s,\delta C_n,U_n,\cdots), & x \in \Omega \\ \tilde{B}\delta U_n(x,t) = 0, & x \in \Omega\end{cases}$$

$$(n = 0,1,2,\cdots) \tag{3.42}$$

其中 Z 为向量函数，且线性依赖 $\delta C_n(x)$。

若以 $G_n(x,x',s)$ 表示式(3.42) 中的微分算子 $\tilde{L}$ 的 Green 函

数，则式(3.42)等价于下面的 Fredholm 积分方程组：

$$\delta U_n(x,s) = \int_\Omega G_n(x,x',s)Z(x',s,\delta C_n(x'),U_n(x'),\cdots)\mathrm{d}x' \tag{3.43}$$

将上式在 $\partial\Omega$ 上关于变量 x 取法向导数有

$$\frac{\partial}{\partial n}\delta U_n(x,s) = \int_\Omega \frac{\partial G_n(x,x',s)}{\partial n}Z(x,s,\delta C_n,U_n,\cdots)\mathrm{d}x' \tag{3.44}$$

以 $U(x,s)-U_n(x,s)$ 代替 $\delta U_n(x,s)$，并取 $x\in\partial\Omega'$，上式变为

$$\Phi(x,s) - \frac{\partial}{\partial n}U_n(x,s) = \int_\Omega \frac{\partial G_n(x,x',s)}{\partial n}Z(x,s,\delta C_n,U_n,\cdots)\mathrm{d}x' \tag{3.45}$$

上式左端的 $\frac{\partial}{\partial n}U(x,s)$ 若已算得，则左端为已知的；右端的 $\frac{\partial}{\partial n}G_n(x,x',s)$ 对适当选取的一组 s 值可通过数值方法得到，从而式(3.45)是关于 $\delta C_n(x)$ 的第一类 Fredholm 积分方程组。

选取一组离散的频率 $s_j(j=1,2,\cdots,J)$，人们可以用数值方法计算积分方程式(3.45)的数值解。不幸的是这类方程一般是不适定的，这种特性将给数值计算带来许多困难。当然，人们可以利用 Backus—Gilbert 方法、正则化方法来求解。

GPST 的基本迭代过程如下：

(1) 首先给定待定函数的初猜测 $C_0(x)$；

(2) 选择的一组值 $s_j(j=1,2,\cdots,J)$，利用数值方法求解式(3.41)中的 $U_0(x,s_j)$ 及算子 $\tilde{L}$ 的 Green 函数 $G_0(x,x',s)$；

(3) 应用有限差分方法数值计算 $\frac{\partial}{\partial n}U_0(x,s_j)$，$\frac{\partial}{\partial n}G_0(x,x',s)$，$x\in\partial\Omega$；

(4) 对 $s = s_j(j = 1,2,\cdots,J)$ 数值求解积分方程组(3.45)得到 $\delta C_0(x)$，从而

$$C_1 = C_0(x) + \delta C_0(x)$$

这一迭代过程可以重复下去，直到满足精度为止。

3.5 解决二维扩散(或波动)方程逆问题的 GPST 方法

考虑如下二维扩散(或波动)方程的初边值问题：

$$\nabla(k(x,y)\nabla u) - \rho\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = 0, \quad (x,y)\in\Omega, \quad t>0 \tag{3.46}$$

边界条件：
$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha_\lambda u\right)\right|_{\Gamma_\lambda} = f_\lambda(x,y,t), \quad \lambda = 1,2,\cdots,\Lambda \tag{3.47}$$

初始条件：
$$u(x,y,0) = 0, \quad (x,y)\in\Omega, \quad r = 1,2 \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,0) = 0, \quad (x,y)\in\Omega, \quad r = 2 \tag{3.49}$$

其中 $r = 1$ 为扩散方程，$r = 2$ 为波动方程，Ω 为 (x,y) 平面内的一个有界区域，$\Gamma = \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_\Lambda$ 为 Ω 的边界。

上述定解问题的一类逆问题是从已知的常数 ρ，边界条件(3.47)，初始条件(3.48)、(3.49)和下列附加条件：

$$u|_{\Gamma_q} = h(x,y,t), \quad \Gamma_q \subset \Gamma \tag{3.50}$$

来确定未知函数 $k(x,y)$。

假设 $f_\lambda(x,y,t)$、$h(x,y,t)$ 和 $u(x,y,t)$ 的 Laplace 变换均存在，按照 GPST 的一般过程有下列步骤：

第一步：将式(3.46)～(3.50)转化到复频域内，则有

$$\nabla(k\nabla v) - \rho s' v = 0, \quad (x,y) \in \Omega \tag{3.51}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \alpha_\lambda v\right)\bigg|_{\Gamma_\lambda} = F_\lambda(x,y,s), \quad \lambda = 1,2,\cdots,\Lambda \tag{3.52}$$

$$v\big|_{\Gamma_q} = H(x,y,s) \tag{3.53}$$

其中 $v(x,y,s)$、$F_\lambda(x,y,s)$ 和 $H(x,y,s)$ 分别为 $u(x,y,t)$、$f_\lambda(x,y,t)$ 和 $h(x,y,t)$ 的 Laplace 变换之象。

因此,原逆问题转化为在复频率内从已知的参数 ρ、$F_\lambda(x,y,s)$ 和 $H(x,y,s)$,以及式(3.51) ~ (3.53) 来确定未知函数 $k(x,y)$。

第二步:建立迭代过程,令

$$\begin{cases} v_{n-1}(x,y,s) = v_n(x,y,s) + \delta v_n \\ k_{n-1}(x,y) = k_n(x,y) + \delta k_n \end{cases} \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{3.54}$$

其中 $k_0(x,y)$ 为未知函数 $k(x,y)$ 的初始猜测函数,$\| k_n(x,y) \| \gg \| \delta k_n \|$,$\| v_n(x,y,s) \| \gg \| \delta v_n \|$,$k_0(x,y)\big|_\Gamma = k_n(x,y)\big|_\Gamma$。将式(3.54) 代入到式(3.51) ~ (3.53),忽略 δ^2 和高阶项,可得到关于 $v_n(x,y,s)$ 的椭圆型偏微分方程组

$$\begin{cases} \nabla(k_n\nabla v_n) - \rho s' v_n = 0, \quad (x,y) \in \Omega \\ \left(\dfrac{\partial v_n}{\partial n} + \alpha_\lambda v_n\right)\bigg|_{\Gamma_\lambda} = F_\lambda(x,y,s), \quad \lambda = 1,2,\cdots,\Lambda \end{cases} \tag{3.55}$$

以及关于 δv_n 的椭圆型偏微分方程组:

$$\begin{cases} \nabla(k_n\nabla \delta v_n) - \rho s' \delta v_n = -\nabla(\delta k_n \nabla v_n), \quad (x,y) \in \Omega \\ \left(\dfrac{\partial \delta v_n}{\partial n} + \alpha_\lambda \sigma v_n\right)\bigg|_{\Gamma_\lambda} = 0, \quad \lambda = 1,2,\cdots,\Lambda \end{cases} \tag{3.56}$$

利用 Green 函数方法,上述椭圆型偏微分方程组的解 δv_n 可表示为

$$\delta v_n = -\iint_\Omega G_n(x,y;x',y',s)\nabla(\delta k_n \nabla v_n)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{3.57}$$

其中 $G_n(x,y;x',y',s)$ 为式(3.56)偏微分算子的 Green 函数。

在 Γ_η 上,将 $\delta v_n = v_{n-1} - v_n$ 中 v_{n-1} 用 $H(x,y,s)$ 代替,得

$$\iint_\Omega G_n(x,y;x',y',s)\Big|_{\Gamma_\eta} \nabla(\delta k_n \nabla v_n)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = [v_n(x,y,s) - H(x,y,s)]\big|_{\Gamma_\eta} \tag{3.58}$$

于是,扰动量 δk_n 由上述二维的第一类 Fredholm 积分方程确定。

下面讨论式(3.55)中 $v_n(x,y,s)$、式(3.56)偏微分算子的 Green 函数 $G_n(x,y;x',y',s)$ 的求法。

假设用小四边形(或三角形)对 G 进行剖分,每个计算网格点用(x,y)来表示,对 G 内的一般内点(x_i,y_j)(简记为(i,j))处,式(3.55)的近似方法采用 Keller 盒式积分方法,即对式(3.55)两边在区域 Ω_{ij} 进行积分,得

$$\iint_{\Omega_{ij}} \nabla(k_n \nabla v_n) - \rho s^r v_n \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{3.59}$$

由 Green 公式得

$$\sum_{i=1}^{4}\int_{\Gamma_{i,j}} k_n \frac{\partial v_n}{\partial n}\mathrm{d}\gamma - \iint_{\Omega_{ij}} \rho s^r v_n \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{3.59$'$}$$

式(3.59′)中的边界积分能采用下列方法近似:

$$\int_{\Gamma_{ij1}} k_n \frac{\partial v_n}{\partial n}\mathrm{d}\gamma \approx \frac{k_{ni,j} + k_{ni-1,j}}{2\cos\theta_1}\left\{\frac{v_{ni-1,j} - v_{ni,j}}{\gamma_{(i,j)(i+1,j)}} - \frac{v_{ni,j-1} - v_{ni,j-1}}{2\gamma_1}\sin\theta_1\right\}\gamma_1 \tag{3.60a}$$

$$\int_{\Gamma_{ij2}} k_n \frac{\partial v_n}{\partial n}\mathrm{d}\gamma \approx \frac{k_{ni,j} + k_{ni,j-1}}{2\cos\theta_2}\left\{\frac{v_{ni,j-1} - v_{ni,j}}{\gamma_{(i,j-1)(i,j)}} - \frac{v_{ni-1,j} - v_{ni-1,j}}{2\gamma_2}\sin\theta_2\right\}\gamma_2 \tag{3.60b}$$

$$\int_{\Gamma_{ij3}} k_n \frac{\partial v_n}{\partial n}\mathrm{d}\gamma \approx \frac{k_{ni,j}+k_{ni-1,j}}{2\cos\theta_3}\left\{\frac{v_{ni-1,j}-v_{ni,j}}{\gamma_{(i-1,j)(i,j)}} - \frac{v_{ni,j-1}-v_{ni,j+1}}{2\gamma_3}\sin\theta_3\right\}\gamma_3 \tag{3.60c}$$

$$\int_{\Gamma_{ij4}} k_n \frac{\partial v_n}{\partial n}\mathrm{d}\gamma \approx \frac{k_{ni,j}+k_{ni,j-1}}{2\cos\theta_4}\left\{\frac{v_{ni,j-1}-v_{ni,j}}{\gamma_{(i,j-1)(i,j)}} - \frac{v_{ni+1,j}-v_{ni-1,j}}{2\gamma_4}\sin\theta_4\right\}\gamma_4 \tag{3.60d}$$

式(3.59)中的面积分采用下列方法近似：

$$\iint_{\Omega_{ij}} \rho s^r v_n \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho s^r v_{ni,j}\Delta_{i,j} \tag{3.60e}$$

其中 θ_i 为边界法线方向与边的夹角，γ_i 为 $\Gamma_{i,j}$ 的长度，$\gamma_{(i,j)(p,q)}$ 为 (i,j) 与 (p,q) 两点间的距离，$\Delta_{i,j}$ 为小四边形 $\Omega_{i,j}$ 的面积，见示意图 3.5。

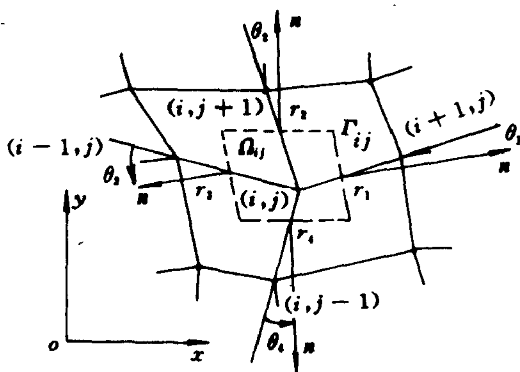


图 3.5 内网格点(i,j)的差分示意图

在边界上，如$(1,q)$点，采用下列方法来逼近$\frac{\partial v_n}{\partial n}$：

$$\left.\frac{\partial v_n}{\partial n}\right|_{(1,q)} \approx \frac{4v_{2n,q}-3v_{n1,q}-v_{3n,q}}{\gamma_{(1,q)(2,q)}+\gamma_{(2,q)(3,q)}}\cos\theta$$

$$+\frac{v_{n1,q+1}-v_{n1,q-1}}{\gamma_{(1,q)(1,q+1)}+\gamma_{(1,q-1)(1,q)}}\sin\theta \tag{3.60f}$$

其中 θ 如图 3.6 所示。

对于式(3.56)的 Green 函数可采用上述同样的方法处理，不同之处在式(3.59)的右边增加了一项关于 δ — 函数的积分，即

$$\iint_{\Omega_{i,j}}\delta(\gamma_{(i,j)(p,q)})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}1, & (i,j)=(p,q)\\0, & (i,j)\neq(p,q)\end{cases} \tag{3.61}$$

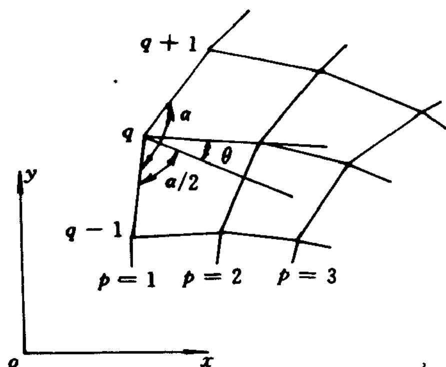


图 3.6　边界网格点(p,q)的法方向示意图

因此，关于 $v_n(x,y,s)$ 和 $G_n(x,y;x',y',s)$ 离散后的线性方程组的系数矩阵是完全相同的，不同之处是右边的自由项。为了提高计算效率，对于 $v_n(x,y,s)$ 和 $G_n(x,y;x',y',s)$ 可用下列线性方程组一起确定：

$$A_n(k_n,s)\{V_n(s),G_n(\Gamma_q,s)\}=\{B(s),C(\Gamma_q,s)\} \tag{3.62}$$

其中 $A_n(k_n,s)$ 由椭圆型偏微分方程式(3.55)离散后得到的五对角矩阵，$V_n(s)$ 是 $v_n(x,y,s)$ 在所有网格点上的值，$G_n(\Gamma_q,s)$ 是所有 $G_n(\Gamma_q;x_i',y_j',s)$ 的值构成的矩阵，$B(s)$ 是由式(3.55)的边界条件而确定，$C(\Gamma_q,s)$ 是由式(3.56)的边界条件和 δ — 函数 $\delta\{\gamma_{(i,j)(p,q)}\}$ 而确定的矩阵。若总网格点数为 N，边界总节点数为

M，则 $G_n(\Gamma_q,s)$、$C(\Gamma_q,s)$ 为 $N\times M$ 阶矩阵，B_n、V_n 为 N 维向量。

对式(3.58)的积分方程采用相同的四边形区域作剖分和离散化方法，则有

$$\frac{\partial\,\delta k_n}{\partial x'}\approx\frac{1}{\sin(\varphi_{ij}-\psi_{ij})}\left\{\frac{\delta k_{ni+1,j}-\delta k_{ni-1,j}}{\gamma_{(i,j)(i+1,j)}+\gamma_{(i,j)(i-1,j)}}\sin\varphi_{ij}\right.$$
$$\left.-\frac{\delta k_{ni,j+1}-\delta k_{ni,j-1}}{\gamma_{(i,j)(i,j-1)}+\gamma_{(i,j)(i,j+1)}}\sin\psi_{ij}\right\}\tag{3.63a}$$

$$\frac{\partial\,\delta k_n}{\partial y'}\approx\frac{1}{\sin(\varphi_{ij}-\psi_{ij})}\left\{\frac{-\delta k_{ni-1,j}+\delta k_{ni+1,j}}{\gamma_{(i,j)(i-1,j)}+\gamma_{(i,j)(i+1,j)}}\cos\varphi_{ij}\right.$$
$$\left.-\frac{\delta k_{ni,j-1}-\delta k_{ni,j+1}}{\gamma_{(i,j)(i,j-1)}+\gamma_{(i,j)(i,j+1)}}\cos\psi_{ij}\right\}\tag{3.63b}$$

其中 φ_{ij}、ψ_{ij} 是局部网格坐标系下两坐标轴与 x 轴的夹角，如图 3.7 所示。

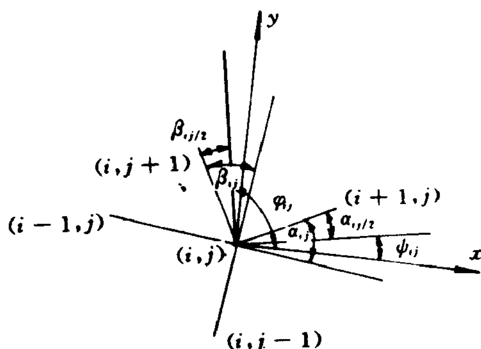


图 3.7 φ_{ij}、ψ_{ij} 在局部网格坐标系下所表示的夹角

类似地，对 $\frac{\partial v_n}{\partial x'}$、$\frac{\partial v_n}{\partial y'}$、$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x'^2}$ 和 $\frac{\partial^2 v_n}{\partial x'^2}$ 采用相同的离散化方法，则式(3.58)离散成下列线性方程组：

$$M_n(v_n,G_n,s_\sigma)\delta K_n(x,y) = S_n(s_\sigma) \tag{3.64}$$

其中 $M_n(v_n,G_n,s_\sigma)$ 由积分算子在复频率 s 为 s_σ 时离散后得到的矩阵，$\delta K_n(x,y)$ 为所有网格点上的值构成的向量，$S_n(s_\sigma)$ 为式(3.58)中右边在复频率 s 为 s_σ 时的向量。

若 s_σ 选择 L 个不同的复频率，则 $\delta K_n(x,y)$ 由下列超定线性方程组确定：

$$\widetilde{M}_n(v_n,G_n)\delta K_n = \widetilde{S}_n \tag{3.65}$$

其中

$$\widetilde{M}_n(v_n,G_n) = \begin{bmatrix} M_n(v_n,G_n,s_1) \\ \vdots \\ M_n(v_n,G_n,s_L) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{S}_n = \begin{bmatrix} S_n(s_1) \\ \vdots \\ S_n(s_N) \end{bmatrix}$$

由于第一类 Fredholm 积分方程一般是不适定问题，所以离散后得到的线性方程组一般也是不适定的。则采用正则化方法得到 δK_n，由下列方程组确定：

$$(\widetilde{M}_n^- \widetilde{M}_n + \alpha I)\delta K_n = \widetilde{M}_n^- \widetilde{S}_n \tag{3.66}$$

其中 I 为单位矩阵，α 为正则化因子，$^-$ 为共轭转置。

因此，利用 GPST 方法解决二维扩散（或波动）方程逆问题的一般步骤为：

第一步：选取合适的初始猜测函数 $k_0(x,y)$；

第二步：对不同的复频率 s_σ，利用有限差分（或有限元）方法求解 $v_n(x,y,s_\sigma)$ 和 $G_n(x,y,x',y',s)$ 的数值解，即求方程组(3.62)的解；

第三步：利用正则化方法求第一类 Fredholm 积分方程式(3.58)的数值解，即求线性方程组(3.66)之解 δK_n；

第四步：由 $k_1(x,y) = k_0(x,y) + \delta k_0(x,y)$ 作为下次迭代的初始猜测函数；

第五步：若 $\| v_n(x,y,s) - H(x,y,s) \|_{\Gamma_T} < \epsilon$（$\epsilon$ 为指定的精度参数），则计算过程结束，否则，再次执行上述全部过程。

数值计算实例

在没有实际测量数据的情况下，利用下列过程来证实上面介绍的 GPST 的数值方法的可行性。

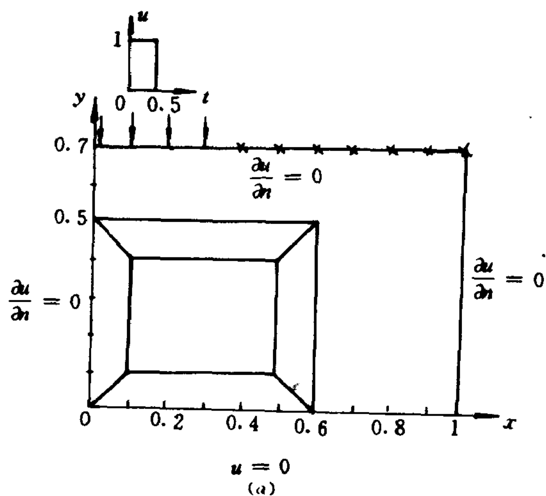
首先，选定一个函数 $k^*(x,y)$ 作为目标函数，边界条件函数 $f_\lambda(x,y,t)(\lambda=1,2,\cdots,\Lambda)$，及它们的 Laplace 变换 $F_\lambda(x,y,s)$ 在选定的复频率 $\{s_\sigma\}(\sigma=1,2,\cdots,L)$ 上的值。利用有限差分方法求椭圆型偏微分方程式(3.51)、(3.52) 的数值解，并把 $v(x,y,s)$ 在 $\Gamma_\gamma(\subset\Gamma)$ 的值作为模拟附加条件 $H(x,y,s_\sigma)(\sigma=1,2,\cdots,L)$。

然后，选取 $k_0(x,y)$ 作为目标函数的初始猜测函数，利用式(3.62)、(3.66) 和(3.54)，求得 $k_1(x,y)$，并应用类似的过程可得到 $k_2(x,y)$。这个过程一直进行下去，直到 $k_N(x,y)$ 达到极限值，并观察精确的目标函数 $k^*(x,y)$ 能否被重构。重构的误差用 L_2 范数衡量：

$$\Delta_n = \| k^*(x,y) - k_n(x,y) \|_2 \quad (n\text{ 为迭代次数}) \tag{3.67}$$

例 1 在式(3.46) 中选 $r=2$，即双曲偏微分方程，参数 ρ 为 1，边界条件及目标函数 $k^*(x,y)$，$\Delta x=\Delta y=0.1$，网格剖分如图 3.8(a) 所示。$\{s_\sigma\}$ 选为(1,2,…,15)，初始猜测函数选为 $k_0(x,y)\equiv 1$。初始误差 Δ_0 和经过 3 次迭代的重构误差 Δ_3 分别为 4.47 和 2.03。重构的结果见图 3.8(b)。

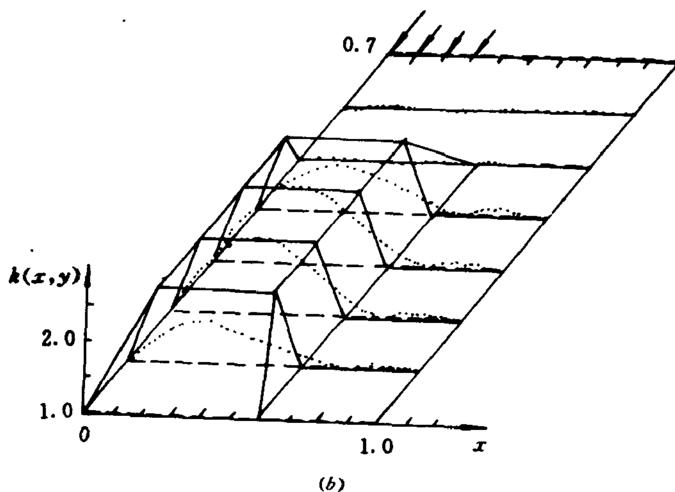
例 2 在式(3.46) 中选 $r=1$，即扩散偏微分方程，参数 ρ 为 1，问题求解区域为[0,10] × [0,10]，边界条件为 $u|_{\partial\Omega}=1-e^{-t}$，初始条件为 $u(x,y,0)|_\Omega=0$，附加条件为已知 $u(x,y,t)$ 在正方形 $y=0$ 一边处的变化规律。网格剖分为 $\Delta x=\Delta y=\dfrac{5}{3}$，$\{s_\sigma\}$ 选为$\{1,2,\cdots,15\}$，初始猜测函数选为 $k_0(x,y)\equiv 1$。初始误差 Δ_0 和经过 10 次迭代的重构误差 Δ_{10} 分别为 2.52 和 0.50。目标函数 $k^*(x,y)$，重构函数 $k_{10}(x,y)$ 见图 3.9。



(a)

带 * 点表示测量点位置

带尖头点表示 u 变化规律已知，且为脉冲宽度为 0.5 单位矩形脉冲



(b)

实线为 $k^*(x,y)$ 虚线为 $k_0(x,y)$ 点线为重构值 $k_3(x,y)$

图 3.8

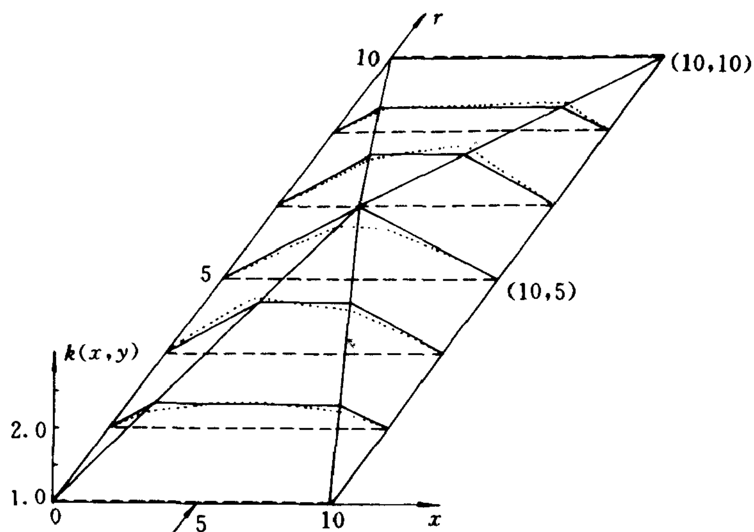


图 3.9

实线为 $k^*(x,y)$ 虚线为 $k_0(x,y)$ 点线为重构值 $k_{10}(x,y)$

第四章　最佳摄动量法

考虑如下线性微分方程组的初边值问题：

$$\begin{cases} L[C(x),t]u(x,t)=0, & x\in\Omega,\quad t>0 \\ Bu(x,t)=f(x,t), & x\in\partial\Omega,\quad t>0 \\ Eu(x,0)=g(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 u 为一向量函数，L 为矩阵微分算子，B 为矩阵边值条件算子，E 为矩阵初值条件算子，$C(x)$ 为待定向量函数，L 线性依赖于 $C(x)$，Ω 为区域，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界。

微分方程的一类逆问题为：从式(4.1)及附加边界条件

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega'}=\varphi(x,t),\quad x\in\partial\Omega'\subset\partial\Omega,\quad t\in[0,T] \tag{4.2}$$

来确定算子 L 中的未知向量函数 $C(x)$。

该类逆问题很容易建立一个非线性最优化问题。由式(4.1)可知，对每一个 $C(x)$ 都存在解函数 $u(x,t)$，即存在一个从 $C(x)$ 到 $u(x,t)$ 的非线性算子 A_1(即：$A_1[C(x)]=u(x,t)$)。由式(4.2)可知，存在一个从 $u(x,t)$ 到 $\varphi(x,t)$ 的线性算子 A_2(即：$A_2[u(x,t)]=\varphi(x,t)$)。因此，逆问题就是解决下列非线性算子方程的解：

$$A[C(x)]\equiv A_2[A_1[C(x)]]=\varphi(x,t) \tag{4.3}$$

利用 Tikhonov 正则化可将逆问题转化成下列非线性最优化问题的解：

$$J_\alpha(C)=\|A[C]-\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega')\times[0,T]}+\alpha D(C) \tag{4.4}$$

其中,α 为正则化因子,D 为 $L^2(\Omega)$ 上的稳定性泛函。

利用数值方法求解非线性最优化问题的解,便可求得逆问题的数值解。

最佳摄动量法是根据算子识别的摄动法、线性化技术和函数逼近论而提出的一种数值迭代方法,其核心过程为:

(1) 建立迭代过程:

$$C_{n+1}(x) = C_n(x) + \delta C_n(x) \tag{4.5}$$

其中,摄动量 $\delta C_n(x)$ 由下列非线性最优化问题来确定:

$$J_\alpha(\delta C_n) = \| A[C_n + \delta C_n] - \varphi \|^2_{L^2(\partial\Omega)\times[0,T]} + \alpha D(\delta C_n) \tag{4.6}$$

(2) 对上述最优化问题进行离散化,并采用线性化方法求得 $\delta C_n(x)$ 的数值解,即求解非线性最优化问题的局部极小值。

本章将讨论最佳摄动量法解决一维、二维偏微分方程逆问题的数值解,以及利用偏微分方程正问题的区域分裂方法研究逆问题的区域分裂算法和异步并行处理技术。

4.1 最佳摄动量法的一般过程

本节将讨论由式(4.1)、(4.2) 所构成的逆问题。

假定设逆问题的精确解为$C^*(x)$,相对应于式(4.1)的初边值问题的解为 $u^*(x,t)$。$C(x)$ 为线性完备实函数空间 K 上的一个元素,K 上的一个基函数族为 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots$,则

$$C^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i^* \varphi_i(x) \tag{4.7}$$

取有限项进行逼近,得

$$C^*(x) \approx \sum_{i=1}^{n} k_i^* \varphi_i(x) \tag{4.8}$$

n 的大小取决于逼近精度的要求。

因此这类逆问题就是确定一个 n 维实向量

$$\boldsymbol{k}^T = (k_1, \cdots, k_n) \in \mathrm{R}^n$$

使得函数

$$C(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} k_i \varphi_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) \tag{4.9}$$

其中 $\qquad \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = (\varphi_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \varphi_n(\boldsymbol{x}))^T$

同时满足式(4.1)和(4.2)。

令 $C(\boldsymbol{x})$ 对应于式(4.1)边值问题的解记为 $u(C(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x}, t)$，$C_0(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} k_i^0 \varphi_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}_0^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 为 $C^*(\boldsymbol{x})$ 附近的一个函数，对 $C_0(\boldsymbol{x})$ 增加一个微小扰动量 $\delta C_0(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \delta k_i^0 \varphi_i(\boldsymbol{x}) = \delta \boldsymbol{k}_0^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$，对应于 $C_0(\boldsymbol{x}) + \delta C_0(\boldsymbol{x})$，式(4.1)的初边值问题的解记为 $u(C_0(\boldsymbol{x}) + \delta C_0(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x}, t)$。所以，$C(\boldsymbol{x})$ 的确定问题可以转化成 $\delta \boldsymbol{k}_0$ 的确定问题。并且 $\delta \boldsymbol{k}_0$ 可由下列目标函数的局部极小值来确定：

$$F[\delta \boldsymbol{k}_0] = \left\| \frac{\partial u(C_0(\boldsymbol{x}) + \delta C_0(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x}, t)}{\partial n} - \varphi(\boldsymbol{x}, t) \right\|^2_{\partial\Omega \times [0,T]} + \alpha S(\delta \boldsymbol{k}_0) \tag{4.10}$$

其中 α 为正则化因子，$S(\delta \boldsymbol{k}_0)$ 为 $\delta \boldsymbol{k}_0$ 的稳定性函数。

由于 $\delta C_0(\boldsymbol{x})$ 是微小扰动量，则

$$\begin{aligned} & u(C_0(\boldsymbol{x}) + \delta C_0(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x}, t) \\ = & u(C_0(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x}, t) + \nabla_{\boldsymbol{k}_0}^T u(C_0(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x}, t) \delta \boldsymbol{k}_0 + o(\| \delta C_0(\boldsymbol{x}) \|) \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} F[\delta \boldsymbol{k}_0] = & \left\| \frac{\partial u(C_0(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x}, t)}{\partial n} - \varphi(\boldsymbol{x}, t) \right. \\ & \left. + \nabla_{\boldsymbol{k}_0}^T \frac{\partial}{\partial n} u(C_0, (\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x}, t) \cdot \delta \boldsymbol{k}_0 \right\|^2_{\partial\Omega \times [0,T]} + \alpha S(\delta \boldsymbol{k}_0) \end{aligned}$$

若在区域 $\partial\Omega' \times [0,T]$ 离散后有 M 个点 $(\boldsymbol{x}_m, t_m)(m = 1, 2, \cdots M)$，而取 $S(\delta \boldsymbol{k}_0) = \delta \boldsymbol{k}_0^T \delta \boldsymbol{k}_0$，则

$$F[\delta \boldsymbol{k}_0] = \sum_{m=1}^{M} \left[\frac{\partial \boldsymbol{u}(C_0(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x}_m,t_m)}{\partial n} - \varphi(\boldsymbol{x}_m,t_m) + \nabla_{k_0}^T \frac{\partial \boldsymbol{u}(C_0(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x}_m,t_m)}{\partial n} \delta \boldsymbol{k}_0 \right]^2 + \alpha \delta \boldsymbol{k}_0^T \delta \boldsymbol{k}_0$$

令

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}(C_0(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x}_1,t_1)}{\partial n} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{U}(C_0(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x}_m,t_m)}{\partial n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{U}^*}{\partial n} = \begin{bmatrix} \varphi(\boldsymbol{x}_1,t_1) \\ \vdots \\ \varphi(\boldsymbol{x}_M,t_M) \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{m,i})_{M\times n}$$

$$a_{m,i} = \frac{\partial}{\partial k_i} \frac{\partial}{\partial n} \boldsymbol{u}(C_0(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x}_m,t_m)$$

则上式可化简为

$$F[\delta \boldsymbol{k}_0] = \delta \boldsymbol{k}_0^T A^T A \delta \boldsymbol{k}_0 + 2\delta \boldsymbol{k}_0^T A^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n} - \frac{\partial \boldsymbol{U}^*}{\partial n} \right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n} - \frac{\partial \boldsymbol{U}^*}{\partial n} \right)^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n} - \frac{\partial \boldsymbol{U}^*}{\partial n} \right) + \alpha \delta \boldsymbol{k}_0^T \delta \boldsymbol{k}_0 \quad (4.12)$$

不难求得 $F[\delta \boldsymbol{k}_0]$ 的局部极小值 $\delta \boldsymbol{k}_0$ 满足下列线性方程组：

$$(A^T A + \alpha I)\delta \boldsymbol{k}_0 = A^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}^*}{\partial n} - \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n} \right) \quad (4.13)$$

求得上述线性方程组，并将其解 $\delta \boldsymbol{k}_0$ 代入式(4.9)便可求得扰动量 $\delta C_0^0(\boldsymbol{x})$。

最佳摄动量法的基本迭代过程如下：

(1) 首先给定未知量的 $C(\boldsymbol{x})$ 的初始猜测 $C_0(\boldsymbol{x})$；

(2) 应用数值方法求解边值问题式(4.1)的数值解 $\boldsymbol{u}(C_0(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x},t)$ 以及 $\frac{\partial}{\partial n}\boldsymbol{u}(C_0(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x}_m,t_m)(m = 1,2,\cdots,M)$；

(3) 用数值微分计算 $\frac{\partial}{\partial k_i} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n}(C_0(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x}_m,t_m)$

$$= \frac{1}{\tau} \left[\frac{\partial \boldsymbol{u}(C_0(\boldsymbol{x}) + \tau\varphi_i(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x}_m,t_m)}{\partial n} - \frac{\partial \boldsymbol{u}(C_0(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x}_m,t_m)}{\partial n} \right]$$

即分别对 $C_0(\boldsymbol{x}) + \tau\varphi_i(\boldsymbol{x})(i = 1,2,\cdots,n)$ 应用数值方法求式(4.1)

的数值解，并求得$\dfrac{\partial u(C_0(x)+\tau\varphi_i(x);x_m,t_m)}{\partial n}$；

(4) 求解方程组(4.13)，并用式(4.9)求得扰动量$\delta C_0(x)$，取新的初始猜测为

$$C_1(x)=C_0(x)+\delta C_0(x) \tag{4.14}$$

重复上述过程，直到满足精度要求为止。

关于最佳摄动量法的几点说明：

(1) 这里仅讨论了在时域内的最佳摄动量法，在频域或复频域内也可以建立相应域内的目标函数为$F[\delta \boldsymbol{k}_0]$，从而可以建立类似于式(4.13)的关于$\delta \boldsymbol{k}_0$的线性方程组。

(2) 对关于$u(x,t)$有非线性微分方程的初边值问题的参数识别问题，也可以建立上述类似的迭代过程。

(3) 每项迭代过程，需要计算$n+1$次正问题式(4.1)的数值解和一次$n\times n$阶线性方程组的解，对于具体问题，正问题数值解的次数可以减少，这一点以后将给出处理的方法。

(4) 一般地，稳定性泛函$S[\delta \boldsymbol{k}_0]$可选取为的$\delta \boldsymbol{k}_0^T B\delta \boldsymbol{k}_0$($B$为实正定对称矩阵)，则式(4.13)改为

$$(A^TA+\alpha B)\delta \boldsymbol{k}_0=A^T\left(\frac{\partial U^*}{\partial n}-\frac{\partial U}{\partial n}\right)$$

(5) 正则化因子α的大小合适与否，对问题的迭代收敛速度关系很大。

4.2 解决一维线性扩散方程逆问题的最佳摄动量法

考虑如下的一维线性扩散方程的初边值问题：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\rho c\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad 0<x<1,\quad 0<t<\infty \tag{4.15}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = f(t), \quad u(1,t) = g(t)$$

其中 $u(x,t)$ 是温度，$k(x)$ 是热传导系数，ρ 是密度常数，c 是比热常数。

所讨论的逆问题是要确定热传导系数 $k(x)$。为此需要一个附加条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = h(t)$$

另外，假设 $f(t),g(t),h(t)$ 是已知函数，并且他们的 Laplace 变换均存在。

假设 $\{\varphi_i(x)\}$ 是 $C[0,1]$ 上的基函数族，$k(x) \in C[0,1]$，则一定存在实数序列 $\{k_n\}$，使得

$$k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \varphi_i(x)$$

令 $\quad \boldsymbol{\Phi}_n(x) = (\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))^T, \quad \boldsymbol{k}_n = (k_1,k_2,\cdots,k_n)^T \in \mathrm{R}^n$

$$k_n(x) = \boldsymbol{\Phi}_n^T(x)\boldsymbol{k}_n$$

则有

$$k(x) = \lim_{n\to\infty} k_n(x) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\Phi}_n^T(x)\boldsymbol{k}_n$$

其中 R^n 是 n 维实空间，T 表示转置。

因为 $k_n(x)$ 收敛于 $k(x)$，则对任意小的 $\varepsilon > 0$，一定存在 N，当 $n > N$ 时，总有

$$\| k_n(x) - k(x) \| < \varepsilon$$

因此对固定 n，逆问题就变为从已知的 $f(t),g(t),h(t),c,\rho$ 和 $u_0(x)$ 来确定 $k_i(i = 1,\cdots,n)$。

将逆问题转化成如下优化问题：

$$\min_{\boldsymbol{k}_n \in \mathrm{R}^n} \left| h(t) - \left.\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} \right|^2 \tag{4.16}$$

其中 $u_n(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k_n(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\rho c\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad 0<x<1,\quad 0<t<\infty \tag{4.17}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u(0,t)=f(t),\quad u(1,t)=g(t)$$

在复频域内，上述逆问题则变成如下优化问题：

$$\min_{k_n\in R^n}\left|H(s)-\left.\frac{\partial U_n(x,s)}{\partial x}\right|_{x=0}\right|^2 \tag{4.18}$$

其中 $U_n(x,s)$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k_n(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right]-\rho csU(x,s)=-\rho cu_0(x),\quad 0<x<1 \tag{4.19}$$

$$U(1,s)=F(s),\quad U(1,s)=G(s)$$

其中
$$F(s)=L[f(t)],\quad U(x,s)=L[u(x,t)]$$
$$G(s)=L[g(t)],\quad H(s)=L[h(t)]$$

令
$$Y(k_n,s)=\left.\frac{\partial U_n(x,s)}{\partial x}\right|_{x=0}$$

数值迭代方法为：　$k_n^0+\delta k_n\Rightarrow k_n^0$

对首次迭代方程，左边的 k_n^0 为未知向量 k_n 的初始猜测向量。为了保证迭代过程的收敛性，要求摄动量 δk_n 满足 $\|\delta k_n\|\leqslant\|k_n^0\|$。摄动量 δk_n 由下列优化过程确定：

$$\begin{aligned}&\min_{\delta k_n\in R^n}\|H(s)-Y(k_n^0+\delta k_n,s)\|^2+\alpha S(\delta k_n)\\ \simeq&\min_{\delta k_n\in R^n}\|H(s)-Y(k_n^0,s)-\nabla_{k_n}^T Y(k_n^0,s)\delta k_n\|^2+\alpha S(\delta k_n)\end{aligned} \tag{4.20}$$

其中

$$\nabla_{k_n}^T Y(k_n^0,s)=\left(\frac{\partial Y(k_n^0,s)}{\partial k_1},\cdots,\frac{\partial Y(k_n^0,s)}{\partial k_n}\right)$$

$S(\delta k_n)$ 为稳定性函数，α 为正则化因子。

对一组固定的复频率 $s_j(j=1,2,\cdots,J)$，取 $\|\cdot\|^2$ 为 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$，

$S(\delta \boldsymbol{k}_n) = \|\delta \boldsymbol{k}_n\|^2$,则上述优化过程的解 $\delta \boldsymbol{k}_n$ 可由下列线性方程组来确定:

$$(A^T A + \alpha I)\delta \boldsymbol{k}_n = A^T(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{U}) \tag{4.21}$$

其中

$$\boldsymbol{U} = (Y(\boldsymbol{k}_n^0, s_1), \cdots, Y(\boldsymbol{k}_n^0, s_J))^T$$
$$\boldsymbol{H} = (H(s_1), \cdots, H(s_J))^T$$
$$A = (a_{j,i})_{J\times n},\ a_{j,i} = \frac{\partial Y(\boldsymbol{k}_n^0, s_j)}{\partial k_i}$$

上述迭代过程的形式与 PST 迭代过程的形式是相同的,但它们的线性方程组的元素是完全不同的。

现在讨论 A 的计算方法。把关于 $\boldsymbol{k}_n^0$ 的扩散方程的数值解 $U(\boldsymbol{k}_n^0; x,s)$ 记为 $U_n^0(x,s)$,而 $\boldsymbol{k}_n^0 + \delta \boldsymbol{k}_n$ 的扩散方程的数值解 $U_n(\boldsymbol{k}_n^0 + \delta \boldsymbol{k}_n; x,s)$ 记为 $U_n^1(x,s)$,则

$$U_n^1(x,s) = U_n^0(\boldsymbol{k}_n; x,s) + \delta U^0(\boldsymbol{k}_n; x,s) = U_n^0(x,s) + \delta U_n^0(x,s)$$

把上述公式代入式(4.19),并忽略 $\delta \boldsymbol{k}_n \dfrac{\partial\, \delta U_n(x,s)}{\partial x}$ 项,则关于 $\delta U_n^0(x,s)$ 和 $\delta \boldsymbol{k}_n$ 满足方程

$$\frac{\partial [\Phi_n^T(x)\boldsymbol{k}_n(\delta U_n)'_x]}{\partial x} - \rho c s \delta U_n(x,s)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}[\Phi_n^T(x)\frac{\partial U_n}{\partial x}]\delta \boldsymbol{k}_n, \quad 0 < x < 1 \tag{4.22}$$
$$\delta U_n(0,s) = \delta U_n(1,s) = 0$$

利用 Green 函数方法,方程式(4.22)可以变成第一类 Fredholm 积分方程

$$\int_0^1 G_n(x,x',s)\frac{\partial}{\partial x'}\left[\Phi_n^T(x')\frac{\partial U_n}{\partial x'}\right]\mathrm{d}x'\delta \boldsymbol{k}_n = -\delta U_n(x,s) \tag{4.23}$$

$$\int_0^1 \frac{\partial G_n(x,x',s)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}[\Phi_n^T(x')\frac{\partial U_n}{\partial x'}]\mathrm{d}x'\delta \boldsymbol{k}_n = -\frac{\partial\, \delta U_n(x,s)}{\partial x} \tag{4.24}$$

其中 $G_n(x,x',s)$ 是方程式(4.22)微分算子的 Green 函数。令 $x=0$,则式(4.24)变成

$$\int_0^1 \frac{\partial G_n(0,x',s)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'}[\Phi_n^T(x') \frac{\partial U_n}{\partial x'}]\mathrm{d}x'\delta \boldsymbol{k}_n = -\frac{\partial \delta U_n(0,s)}{\partial x} \tag{4.25}$$

令 $$A_{in}(s) = \int_0^1 \frac{\partial G_n(0,x',s)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'}[\varphi_i(x') \frac{\partial U_n}{\partial x'}]\mathrm{d}x'$$

则式(4.25)变为

$$(A_{1n}(s),A_{2n}(s),\cdots,A_{nn}(s))\delta \boldsymbol{k}_n = -\frac{\partial \delta U_n(0,s)}{\partial x} \tag{4.26a}$$

另一方面,有如下公式成立:

$$\delta U(\boldsymbol{k}_n^0;x,s) = \nabla_{\boldsymbol{k}_n}^T U(\boldsymbol{k}_n^0;x,s)\delta \boldsymbol{k}_n$$

$$\nabla_{\boldsymbol{k}_n} Y(\boldsymbol{k}_n^0,s) = \frac{\partial}{\partial x}\nabla_{\boldsymbol{k}_n} U(\boldsymbol{k}_n^0;x,s)\Big|_{x=0}$$

则有

$$(A_{1n}(s),A_{2n}(s),\cdots,A_{nn}(s))\delta \boldsymbol{k}_n = -\nabla_{\boldsymbol{k}_n} Y(\boldsymbol{k}_n^0,s)\delta \boldsymbol{k}_n$$

由于 $\delta \boldsymbol{k}_n$ 的任意性,可得

$$\nabla_{\boldsymbol{k}_n} Y(\boldsymbol{k}_n^0,s) = -(A_{1n}(s),A_{2n}(s),\cdots,A_{nn}(s)) \tag{4.26b}$$

下面讨论 $A_{in}(s)$ 的计算方法。对 $A_{in}(s)$ 应用分部积分法可得

$$A_{in}(s) = \frac{\partial G_n(0,x',s)}{\partial x}\varphi_i(x') \frac{\partial U_n}{\partial x'}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial^2 G_n(0,x',s)}{\partial x \partial x'}\varphi(x_i) \frac{\partial U_n}{\partial x'}\mathrm{d}x' \tag{4.27}$$

此外,方程式(4.22)的 Green 函数可写如下形式:

$$G_n(x,x',s) = \begin{cases} -M_n(x,s)N_n(x',s), & 0<x<x' \\ -M_n(x',s)N_n(x,s), & x'<x<1 \end{cases}$$

其中 $M_n(x,s)$ 和 $N_n(x,s)$ 是满足方程式(4.19)的齐次形式的两个线性无关解,并且满足边界条件

$$N_n(0,s) = F(s), \quad N_n(1,s) = 1$$

$$M_n(0,s) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}M_n(0,s)}{\mathrm{d}x} = F^{-1}(s)(\Phi_n^T(0)\boldsymbol{k}_n)^{-1}$$

因此

$$\frac{\partial G_n(0,x',s)}{\partial x} = -F^{-1}(s)(\Phi_n^T(0)\boldsymbol{k}_n)^{-1}N_n(x,s)$$
$$= F^{-1}(s)(\Phi_n^T(0)\boldsymbol{k}_n)^{-1}\tilde{U}_n(x,s)$$

其中 $\tilde{U}_n(x,s)$ 是方程式(4.19)当 $G(s)=0$ 时的解。则有

$$\frac{\partial^2 G_n(0,x',s)}{\partial x'\partial x} = F^{-1}(s)(\Phi_n^T(0)\boldsymbol{k}_n)^{-1}\frac{\partial \tilde{U}_n(x,s)}{\partial x'}$$

于是式(4.27)变成

$$A_{in}(s) = -F^{-1}(s)(\Phi_n^T(0)\boldsymbol{k}_n)^{-1}\left[\varphi_i(x')\tilde{U}_n(x',s)\frac{\partial U_n}{\partial x'}\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi_i(x')\frac{\partial \tilde{U}_n}{\partial x'}\frac{\partial U_n}{\partial x'}dx'\right] \tag{4.28}$$

比较式(4.21)和(4.26b)得

$$A = \begin{bmatrix} A_{1n}(s_1) & A_{2n}(s_1) & \cdots & A_{nn}(s_1) \\ & & \cdots & \\ A_{1n}(s_J) & A_{2n}(s_J) & \cdots & A_{nn}(s_J) \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

当 $\{\varphi_i(x)\}$ 选取为线性分段函数时，即

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} n(x-\frac{i-1}{n}), & x\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}] \\ n(\frac{i+1}{n}-x), & x\in[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1-nx, & x\in[0,\frac{1}{n}] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n(x-\frac{n-1}{n}), & x\in[\frac{n-1}{n},1] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则有

$$A_{in}(s) = F^{-1}(s)(k_0)^{-1}\left(\frac{\partial U_n}{\partial x'}\frac{\partial \tilde{U}_n}{\partial x'}\right)\Bigg|_{x'=\frac{i}{n}}, \quad i=1,2,\cdots,n-1$$

$$A_{0n}(s)=F^{-1}(s)(k_0)^{-1}\left(\frac{\partial U_n}{\partial x'}\frac{\partial \tilde{U}_n}{\partial x'}\frac{1}{2n}+\frac{\partial U_n}{\partial x'}\tilde{U}_n\right)\bigg|_{x'=0}$$

$$A_{nn}(s)=F^{-1}(s)(k_0)^{-1}\left(\frac{\partial U_n}{\partial x'}\frac{\partial \tilde{U}_n}{\partial x'}\frac{1}{2n}-\frac{\partial U_n}{\partial x'}\tilde{U}_n\right)\bigg|_{x'=1}$$

若取 $\delta k_0=\delta k_n=0, g(t)=0$，则关于 $\delta k_1,\cdots,\delta k_{n-1}$ 的方程组与利用 GPST 推导出来的线性方程组相一致。

数值模拟

在不失一般性的情况下，选取 $g(t)=0, f(t)$ 为单位阶跃函数，$u_0(x)=0$、$k(x)=1$，$h(t)$ 由方程确定。所以，$F(s)=s^{-1}$，$G(s)=0, H(s)=-\frac{\operatorname{cth}\sqrt{s}}{\sqrt{s}}$。在进行模拟计算时，有限差分的步长 h 取 0.1，用梯形法对积分进行离散，且步长取 0.1。此外，复频率选为 $s_j=j(j=1,2,\cdots,11)$。

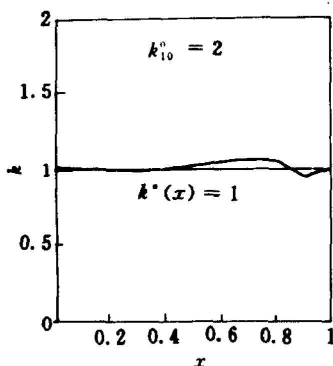


图 4.1　$k(x)$ 精确解与逆问题数值解之比较

例 1　取基函数为分段线性函数，初始迭代函数为 $k_{10}^0(x)=2$，则经过 10 次迭代的计算结果见图 4.1。

例 2　取基函数为多项式函数 $\varphi_i(x)=x^{i-1}(i=1,2,3)$。初始迭代函数为 $k_3^0(x)=1.5-4x+4x^2$。则经过 13 次迭代后的计算结果为（图形见图 4.2）

$$k_3(x)=0.999\ 94-0.017\ 305x+0.022\ 882x^2$$

令　$$\|k^*(x)-k_3^m(x)\|=\sqrt{\sum_{i=0}^{10}\left|k\left(\frac{i}{10}\right)-k_3^m\left(\frac{i}{10}\right)\right|^2}$$

则逼近函数与精确解之间的差 $\|k^*(x)-k_3^m(x)\|$ 对于迭代次数

m 的变化见图 4.3。

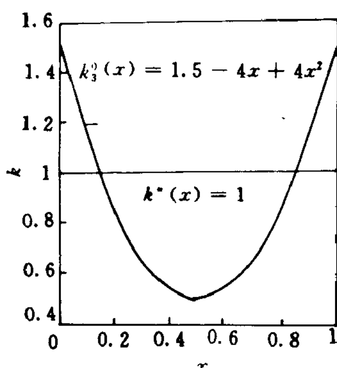


图 4.2　$k(x)$ 精确解与逆问题数值解之比较

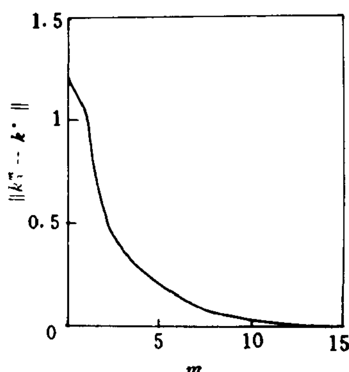


图 4.3　重构函数精度迭代次数的变化曲线

4.3　二维线性时变扩散(或波动)方程的一类逆问题

4.3.1　最佳摄动量法的理论分析

考虑到二维线性时变扩散(或波动)方程的定解问题

$$\nabla(k(x,y,t)\nabla u) - \rho(x,y,t)\frac{\partial^r u}{\partial t^r} + f(x,y,t) = 0,$$

$$(x,y) \in \Omega,\quad t > 0 \qquad (4.30a)$$

边界条件：$\dfrac{\partial u}{\partial n} = q(x,y,t),\quad (x,y) \in \partial\Omega = \Gamma \qquad (4.30b)$

初始条件：$u(x,y,0) = u_0(x,y),\quad (x,y) \in \Omega,\quad r = 1,2 \qquad (4.30c)$

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = g(x,y),\quad (x,y) \in \Omega,\quad r = 2 \qquad (4.30d)$$

其中 $r=1$ 为扩散方程，$r=2$ 为波动方程，Ω 为 xy 平面内的一个有界区域。

上述扩散（或波动）方程的一类逆问题为：从式(4.30)及如下的已知附加边界条件：

$$u(x,y,t)=u_{\gamma}(x,y,t),\quad (x,y)\in\Gamma_{\gamma}\subset\Gamma \tag{4.31}$$

来确定未知函数 $k(x,y,t)$。问题的几何区域见图4.4。因此，该类逆问题是要从已知的函数 $f(x,y,t)$，$u_0(x,y)$，$\rho(x,y,t)$，$g(x,y)$，$q(x,y,t)$ 以及 $u_{\gamma}(x,y,t)$ 来确定 $k(x,y,t)$。对于一般情况下，$q(x,y,t)$ 和 $u_{\gamma}(x,y,t)$ 只能在一些测量点上已知。例如，假设它们以 T 为采样周期，在 $t=iT(i=0,1,\cdots,I)$ 可以测量得到，则该类逆问题为利用已知的函数 $f(x,y,t)$，$u_0(x,y)$，$\rho(x,y,t)$，$g(x,y)$，$q(x,y,iT)$ 以及 $u_{\gamma}(x,y,iT)(i=0,1,\cdots,I)$ 来确定 $k(x,y,t)$。

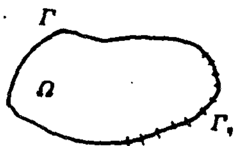


图 4.4 问题的几何区域示意图

假设 $\{\psi_i(x,y)\}$ 和 $\{\phi_j(t)\}$ 分别为区域 Ω 和 $[0,\infty)$ 上的基函数或正交基函数族。并且令

$$k(x,y,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}\psi_i(x,y)\phi_j(t) \tag{4.32}$$

$$k_{nm}(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}k_{ij}\psi_i(x,y)\phi_j(t) \tag{4.33}$$

$$\Phi_{nm}(x,y,t)=(\psi_1(x,y)\phi_1(t),\psi_1(x,y)\phi_2(t),\cdots,\psi_n(x,y)\phi_m(t))^T$$

$$\boldsymbol{k}_{nm}=(k_{11},k_{12},\cdots,k_{1m},\cdots,k_{n1},\cdots,k_{nm})^T\in\mathrm{R}^{nm}$$

其中 R^{nm} 为 nm 维实空间，T 为转置。则

$$k(x,y,t)=\lim_{n,m\to\infty}k_{nm}(x,y,t)=\lim_{n,m\to\infty}\Phi_{nm}^T(x,y,t)\boldsymbol{k}_{nm} \tag{4.34}$$

对适当的 n、m，取有限基之和 $k_{nm}(x,y,t)$ 逼近 $k(x,y,t)$。则该

类逆问题为从已知的函数 $f(x,y,t)$，$u_0(x,y)$，$\rho(x,y,t)$，$g(x,y)$，$q(x,y,iT)$ 以及 $u_q(x,y,iT)(i=0,1,\cdots,I)$ 来确定 $k_{nm}(x,y,t)$，即 $\boldsymbol{k}_{nm}$。

令对应于 $k_{nm}(x,y,t)$ 定解问题式(4.30)的解记为 $u(\boldsymbol{k}_{nm};x,y,t)$。

逆问题可以转化为如下最优化问题：

$$\min_{\boldsymbol{k}_{nm}\in R^{nm}} \| u_q(x,y,t) - u(\boldsymbol{k}_{nm};x,y,t) \|^2_{(x,y,t)\in\Gamma_{qt}} \quad (4.35)$$

其中 $u(\boldsymbol{k}_{nm};x,y,t)$ 满足式(4.30)，$\Gamma_{qt}=\{(x,y,t)\in\Gamma_q,t\in[0,IT]\}$。

令迭代过程如下：

$$\boldsymbol{k}_{nm}^{l+1}=\boldsymbol{k}_{nm}^{l}+\delta\boldsymbol{k}_{nm}^{l},\quad l=0,1,2,\cdots \quad (4.36)$$

其中 $\boldsymbol{k}_{nm}^{0}$ 为初始猜测向量，$\boldsymbol{k}_{nm}^{l}$ 的微小扰动向量 $\delta\boldsymbol{k}_{nm}^{l}(\|\delta\boldsymbol{k}_{nm}^{l}\|<\|\boldsymbol{k}_{nm}^{l}\|)$ 由求下列目标函数的最小值确定：

$$F[\delta\boldsymbol{k}_{nm}^{l}]=\| u_q(x,y,t)-u(\boldsymbol{k}_{nm}^{l}+\delta\boldsymbol{k}_{nm}^{l};x,y,t)\|^2_{(x,y)\in\Gamma_{qt}} + \alpha S[\eta\boldsymbol{k}_{nm}^{l}] \quad (4.37)$$

其中 α 为正则化因子，$S[\delta\boldsymbol{k}_{nm}^{l}]$ 为稳定性泛函。

若 $u_q(x,y,t)$ 在 Γ_q 上的离散点 $(x_j,y_j)(j=1,2,\cdots,J)$ 和它们关于时间 t 的采样点 $(iT)(i=1,2,\cdots I)$ 上已知，并且

$$\begin{aligned} & u(\boldsymbol{k}_{nm}^{l}+\delta\boldsymbol{k}_{nm}^{l};x,y,t) \\ & = u(\boldsymbol{k}_{nm}^{l};x,y,t)+\nabla_{\boldsymbol{k}_{nm}^{l}}u(\boldsymbol{k}_{nm}^{l};x,y,t)\cdot\delta\boldsymbol{k}_{nm}^{l}+o(\|\boldsymbol{k}_{nm}^{l}\|) \end{aligned} \quad (4.38)$$

则目标函数 $F[\delta\boldsymbol{k}_{nm}^{l}]$ 简化为

$$\begin{aligned} F[\delta\boldsymbol{k}_{nm}^{l}] = & \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}[u_q(x_j,y_j,iT)-u(\boldsymbol{k}_{nm}^{l};x_jy_j,iT) \\ & -\nabla_{\boldsymbol{k}_{nm}^{l}}u(\boldsymbol{k}_{nm}^{l};x,y,t)\cdot\delta\boldsymbol{k}_{nm}^{l}]^2+\alpha S[\delta\boldsymbol{k}_{nm}^{l}] \end{aligned}$$

令

$$b_j(i)=u_q(x_j,y_j,iT)-u(\boldsymbol{k}_{nm}^{l};x_j,y_j,iT) \quad (4.39a)$$

$$a_j^T(i) = \nabla_{k_{nm}^l} u(k_{nm}^l; x, y, t) \tag{4.39b}$$

于是

$$F[\delta k_{nm}^l] = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}[b_j(i) - a_j^T(i)\delta k_{nm}^l]^2 + \alpha S[\delta k_{nm}^l] \tag{4.40}$$

若稳定性泛函 $S[\delta k_{nm}^l]$ 选取为 $(\delta k_{nm}^l)^T\delta k_{nm}^l$，则不难知道 $F[\delta k_{nm}^l]$ 是关于 δk_{nm}^l 的正定二次型，并且它的最小值由下列方程组确定：

$$\sum_{i=1}^{I}[A^T(i)A(i) + \alpha E]\delta k_{nm}^l = \sum_{i=1}^{I}A^T(i)B(i) \tag{4.41}$$

其中

$$A(i) = \begin{bmatrix} a_1^T(i) \\ a_2^T(i) \\ \vdots \\ a_J^T(i) \end{bmatrix}, \quad B(i) = \begin{bmatrix} b_1(i) \\ b_2(i) \\ \vdots \\ b_J(i) \end{bmatrix}$$

E 为 $nm \times nm$ 阶单位矩阵。

下面讨论关于 $\nabla_{k_{nm}^l} u(k_{nm}^l; x, y, t)$ 的计算方法。

为了保证逆问题的计算精度，对定解问题式(4.30a)～(4.30d)一般都采用隐式格式。不妨设该定解问题离散后得到的差分方程为如下形式：

$$U_{i+1} = U_i + D_i(k_{nm}^l)U_{i+1} + H_i \quad (\text{对于扩散方程}) \tag{4.42a}$$

或

$$U_{i+1} = 2U_i - U^{i-1} + D_i(k_{nm}^l)U_{i-1} + H_i \quad (\text{对于波动方程}) \tag{4.42b}$$

其中 U_i 表示 $u(k_{nm}^l; x, y, t)$ 在 Ω 内所有网格点上在 $i\tau$ 时刻(τ 为时间域上的步长，且要求选取合适的 τ，使得 $i\tau$ 经过采样周期点，即 $iT(i = 0, 1, 2, \cdots, I)$)的函数值所构成的列向量，$H_i$ 的维数与 U_i 相同，$D_i(k_{nm}^l)$ 表示在时刻 $n\tau$ 与 k_{nm}^l 有关的稀疏矩阵。若 $(x_j, y_j)(j = 1, 2, \cdots, J)$ 在网格点上，则 $u(k_{nm}^l; x_j, y_j, iT)$ 一定能从下列问题的计算中得到：

$$U_{i+1} = [E - D_i(\boldsymbol{k}^l_{nm})]^{-1}[U_i + H_i] \qquad (4.43a)$$

或　$$U_{i+1} = [E - D_i(\boldsymbol{k}^l_{nm})]^{-1}[2U_i - U_{i-1} + H_i] \qquad (4.43b)$$

其中 E 为单位矩阵。

对式(4.42a)、(4.42b) 求 $\boldsymbol{k}^l_{nm}$ 的分量 $k_\nu(\nu = 1,2,\cdots,nm)$ 求偏导数得

$$\frac{\partial U_{i+1}}{\partial k_\nu} = \frac{\partial U_i}{\partial k_\nu} + \frac{\partial D_i(\boldsymbol{k}^l_{nm})}{\partial k_\nu}U_{i+1} + D_i(\boldsymbol{k}^l_{nm})\frac{\partial U_{i+1}}{\partial k_\nu} \qquad (4.44a)$$

或

$$\frac{\partial U_{i+1}}{\partial k_\nu} = 2\frac{\partial U_i}{\partial k_\nu} - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial k_\nu} + \frac{\partial D_i(\boldsymbol{k}^l_{nm})}{\partial k_\nu}U_{i+1} + D_i(\boldsymbol{k}^l_{nm})\frac{\partial U_{i+1}}{\partial k_\nu} \qquad (4.44b)$$

则

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{k}^l_{nm};x_j,y_j,iT)}{\partial k_\nu}$$

由下列公式计算得到：

$$\frac{\partial U_{i+1}}{\partial k_\nu} = [E - D_i(\boldsymbol{k}^l_{nm})]^{-1}\left[\frac{\partial U_i}{\partial k_\nu} + \frac{\partial D_i(\boldsymbol{k}^l_{nm})}{\partial k_\nu}U_{i+1}\right] \qquad (4.45a)$$

或

$$\frac{\partial U_{i+1}}{\partial k_\nu} = [E - D_i(\boldsymbol{k}^l_{nm})]^{-1}\left[2\frac{\partial U_i}{\partial k_\nu} - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial k_\nu} + \frac{\partial D_i(\boldsymbol{k}^l_{nm})}{\partial k_\nu}U_{i+1}\right] \qquad (4.45b)$$

不难发现，确定 $\nabla_{\boldsymbol{k}^l_{nm}}u(\boldsymbol{k}^l_{nm};x,y,t)$ 与确定 $u(\boldsymbol{k}^l_{nm};x_j,y_j,iT)$ 方法是相同的。它们都需要计算 $E - D_i(\boldsymbol{k}^l_{nm})$ 的逆矩阵，然后再作一个向量与该逆矩阵的乘积。

因此，对固定的 n、m，式(4.30a) ~ (4.30b) 定解问题的逆问题的基本迭代过程为：

(1) 首先给定未知函数 $k(x,y,t)$ 和初始猜测函数 $k_{nm}(x,y,t)$，即 $\boldsymbol{k}^l_{nm}$。

(2) 应用数值方法求解定解问题的数值解，即求差分方程式(4.42a) 或(4.42b) 的解，从而确定 $u(\boldsymbol{k}^l_{nm};x_j,y_j,iT)$。求差分方程

式(4.44a)或(4.44b)的解，确定 $\nabla_{k_{nm}^l} u(k_{nm}^l;x,y,t)$。

(3) 解线性方程组(4.41)，求得 δk_{nm}^l。

(4) 由迭代过程式(4.36)得到一组新的初始猜测向量 δk_{nm}^l。

重复上述(2)、(3)过程，直到满足精度要求为止。

由于上述基本迭代过程是在微小扰动的假设下得到的，则当 $u_\eta(x,y,t)$ 与 $u(k_{nm}^l;x,\tilde{y},t)$ 相差较大时，所得到的扰动向量 δk_{nm}^l 有可能不合适。因此，有必要建立一个辅助函数

$$u_\beta(k_{nm}^l;x,y,t) = u(k_{nm}^l;x,y,t) + \beta[u_\eta(x,y,t) - u_\beta(k_{nm}^l;x,y,t)] \tag{4.46}$$

其中 $\beta \in (0,1)$，一般 β 选择为 0.382。

把它作为与 $u_\eta(x,y,t)$ 相类似的附加边界条件，显然

$$\| u_\beta(k_{nm}^l;x,y,t) - u(k_{nm}^l;x,y,t) \| < \| u_\eta(x,y,t) - u(k_{nm}^l;x,y,t) \| \tag{4.47}$$

在 $u_\beta(k_{nm}^l;x,y,t)$ 作为附加边界条件下，k_{nm}^l 的扰动向量 $\delta_\beta k_{nm}^l$ 由下列方法确定：

$$\min_{\delta_\beta k_{nm}^l \in R^{nm}} \| u_\beta(k_{nm}^l;x,y,t) - u(k_{nm}^l + \delta_\beta k_{nm}^l;x,y,t) \|^2_{(x,y)\in\Gamma_\psi} + \alpha S[\delta_\beta k_{nm}^l]$$

不难推得 δk_{nm}^l 与 $\delta_\beta k_{nm}^l$ 之间的关系式

$$\delta_\beta k_{nm}^l = \beta \delta k_{nm}^l \tag{4.48}$$

对于扰动向量 $\delta_\beta k_{nm}^l$ 和 δk_{nm}^l，我们选择较合适的一个向量作为 k_{nm}^{l+1} 所需的扰动向量，即迭代过程式(4.36)改为

$$k_{nm}^{l+1} = k_{nm}^l + \begin{cases} \delta k_{nm}^l, & \zeta \leqslant 0 \\ \delta_\beta k_{nm}^l, & \zeta > 0 \end{cases} \tag{4.49}$$

其中 $\zeta = \| u_\eta(x,y,t) - u(k_{nm}^l + \delta k_{nm}^l;x,y,t) \| - \| u_\eta(x,y,t) - u(k_{nm}^l + \delta_\beta k_{nm}^l;x,y,t) \|$。

为了验证上述求解逆问题的迭代方法的可行性，下面几节将列举几种类型方程的模拟数值计算实例。

4.3.2 二维时不变扩散系数逆问题的模拟计算实例

考虑的扩散方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$+(x^2+y^2-4)e^{-t}=0,\quad (x,y)\in\Omega,\quad 0<t<\infty$$

其中区域$\Omega=[0,1]\times[0,1]$，$\partial\Omega=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4$，(如图4.5所示)。

初始条件：

$$u(x,y,0)=x^2+y^2$$

边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_4}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_3}=-2e^{-t}$$

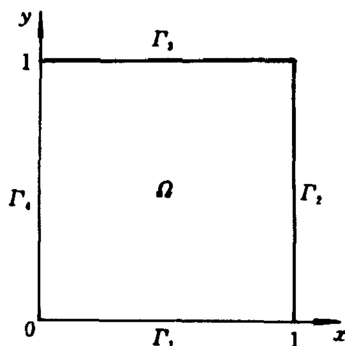


图 4.5 问题的求解区域

求解扩散方程的数值方法采用有限差分的五点全隐式格式。

$k(x,y)$ 的精确值 $k^*(x,y)$ 与每次迭代得到的近似解 $k_{nm}^l(x,y)$ 之间的距离用下列公式来衡量：

$$ER1(k_{nm}^l(x,y),\quad k^*(x,y))$$
$$=10\log\sqrt{\sum_{ij}|k_{nm}^l(x_i,y_j)-k^*(x_i,y_j)|^2}$$

或

$$ER2(k_{nm}^l(x,y)-k^*(x,y))$$
$$=10\log\frac{\sum_{ij}|k_{nm}^l(x_i,y_j)-k^*(x_i,y_j)|^2}{\sum_{ij}|k^*(x_i,y_j)|^2}$$

其中(x_i,y_j)为Ω上的网格点。

$k^*(x,y)$ 相对应的 $u_\eta(x,y,t)$ 与 $k^l_{nm}(x,y)$ 相对应的 $u(k^l_{nm};x,y,t)$（记为 u^l_{nm}）在 Γ_η 上的距离用下列公式来衡量：

$$ER1(u_\eta,u^l_{nm}) = 10\log\sqrt{\sum_{ij}u_\eta(x_i,y_j,iT) - u(k^l_{nm};x_i,y_j,iT)^2}$$

或

$$ER2(u_\eta,u^l_{nm}) = 10\log\frac{\sum_{ij}|u_\eta(x_i,y_j,iT) - u(k^l_{nm};x_i,y_j,iT)|^2}{\sum_{ij}|u_\eta(x_j,y_j,iT)|^2}$$

其中(x_j,y_j)为 Γ_η 的测量点（它也是网格上的点）。

$u_\eta(x,y,t)$ 是在给定 $k^*(x,y)$ 的情况下，求定解问题的数值解而得到的，这样得到的 $u_\eta(x_i,y_i,iT)$ 作为模拟测量值。为了考虑测量噪声对迭代方法的影响，我们用 $u_\eta(x,y,t)(1+r\%\zeta)$（$\zeta$ 为 $[-1,1]$ 上的随机数）来模拟带有 $r\%$ 的相对随机测量误差。

例 1　取 $k^*(x,y)=1,\Gamma_\eta=\Gamma,\Delta x=\Delta y=T=0.1,I=10$，$\alpha=0.0001$，$\{\phi_i(x,y)\}$ 为 $\{1,x,y,xy,x^2,y^2\}$。对不同的初始猜测量和不同的随机测量误差，模拟计算结果见表 4.1。

表　4.1

噪声 $r\%$	0		1		5
初始猜测 k^0_n	(5,0,0,0,0,0)	(1,1,1,1,1,1)	(5,0,0,0,0,0)	(1,1,1,1,1,1)	(5,0,0,0,0,0)
迭代次数	5	13	4	10	4
结果值 k^m_n	0.9837	1.0000	1.000	0.9966	0.9966
	-3.2E-5	4.7E-6	-0.0028	-0.0027	-0.0163
	-3.2E-5	-6.1E-6	-0.0049	-0.0048	-0.0275
	5.6E-5	2.1E-6	0.0194	0.0194	0.1009
	3.6E-5	-4.9E-6	0.0020	0.0020	0.0120
	1.7E-5	0.0010	0.0049	-0.0047	0.0269
$ER2(k^0_n,k^m_n)$	2.6E-7	6.7E-7	2.4E-5	3.8E-5	5.8E-4
$ER2(u_\eta,u^*)$	1.53E-5	2.54E-5	5.71E-3	5.71E-3	2.85E-2
$ER2(u_\eta,u_0)$	8.28	1.70	8.28	1.70	8.28

若对表 4.1 的第一种情况仅改取正则化因子 $\alpha = 0.001$。则需要 36 次迭代才能达到相同的精度。

例 2 取 $k^*(x,y) = 1 + (x + y - 2)^2, \Gamma_q = \Gamma_1 + \Gamma_2, \Delta x = \Delta y = T = 0.1, I = 11, \alpha = 0.0001, \{\phi_i(x,y)\}$ 为 $\{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$。对不同的初始猜测量和不同的随机测量误差，模拟计算结果见表 4.2。

表 4.2

噪声 $r\%$	0		1		5
初始猜测 k_n^0	(5,0,0, 0,0,0)	(1,1,1, 1,1,1)	(5,0,0, 0,0,0)	(1,1,1, 1,1,1)	(5,0,0, 0,0,0)
迭代次数	5	8	6	8	7
结果值 k_n^m	5.000 0 -4.000 0 -3.999 9 2.000 0 1.000 1 1.000 9	5.000 1 -4.000 3 -3.999 9 2.000 0 1.000 1 1.000 1	4.929 9 -3.988 0 -3.870 8 2.059 3 0.993 7 0.913 8	4.929 9 -3.983 6 -3.872 0 2.060 5 0.991 7 0.913 7	4.674 5 -3.995 9 -3.359 7 2.301 2 0.992 8 0.575 0
$ER2(k_n^0, k_n^m)$	1.6E-7	4.1E-8	1.7E-4	1.8E-4	4.6E-3
$ER2(u_q, u^*)$	6.74E-5	2.34E-5	5.79E-3	5.71E-3	2.89E-2
$ER2(u_q, u_0)$	2.17	0.191	2.17	0.191	2.17

在该算例中，若 Γ_q 取为 Γ_1，初始猜测 $k^0(x,y) = 5$，则对不同的随机测量误差 $ER1(k_{nm}^l(x,y), k^*(x,y))$ 和 $ER1(u_q, u_{nm}^l)$ 与迭代次数 l 的变化曲线见图 4.6 和图 4.7。

例 3 取 $k^*(x,y) = 1, \Gamma_q = \Gamma, \Delta x = \Delta y = T = 0.1, nm = 121, \alpha = 0.0001$ 及

$$\{\phi_i(x,y)\} = \begin{cases} 1, & (x,y)\text{ 在单个网络点上} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

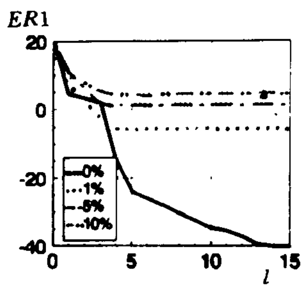


图 4.6　重构函数的精度随迭代次数的变化曲线

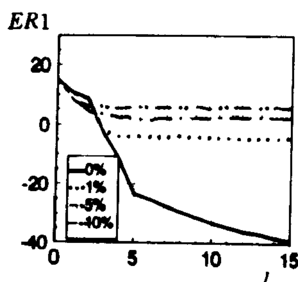


图 4.7　目标函数的极小值随迭代次数的变化曲线

$k_{121}^{0}(x,y)$ 初始猜测为 1.5，则 $ER2(k_{nm}^{l}(x,y),k^{*}(x,y))$ 和 $ER2(u_{\eta},u_{nm}^{l})$ 与迭代次数 l 的变化曲线见图 4.8 和图 4.9。

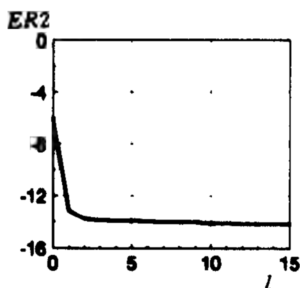


图 4.8　重构函数的精度迭代次数的变化曲线

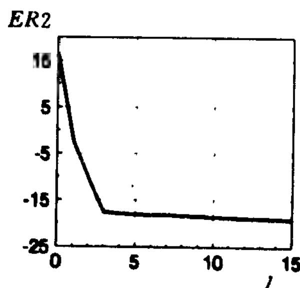


图 4.9　目标函数的极小值随迭代次数的变化曲线

4.3.3　二维时变扩散系数逆问题的模拟计算实例

在定解问题式(4.30a) ~ (4.30d) 中取 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$，$r=1$，$\rho(x,y,t)=1$，$f(x,y,t)=4e^{-t}\cos t[1+x+y+xy+t^{2}(x^{2}+y^{2})]+(x^{2}+y^{2})(\cos t+\sin t)e^{-t}+2e^{-t}\cos t[x(1+ty+2xt^{2})$

$+ y(1 + tx + 2yt^2)]$。

初始条件： $u_0(x,y) = x^2 + y^2$

边界条件： $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_4} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_3} = 2e^{-t}\cos t$$

求解扩散的数值方法采用有限差分的五点全隐式格式。

$k(x,y,t)$ 的精确值 $k^*(x,y,t)$ 与每次迭代得到的近似解 $k_{nm}^l(x,y,t)$ 之间的距离用下列公式来衡量：

$$ER(k_{nm}^l(x,y,t),k^*(x,y,t))$$

$$= 10\log\sqrt{\sum_{i,j,v}|k_{nm}^l(x_i,y_j,vT) - k^*(x_i,y_j,vT)|^2}$$

$k^*(x,y,t)$ 相对应的 $u_q(x,y,t)$ 与 $k_{nm}^l(x,y,t)$ 相对应的 $u(k_{nm}^l(x,y,t);x,y,t)$ 在 Γ_q 之间的距离用下列公式来衡量：

$$ER(u_q,u_{nm}^l)$$

$$= 10\log\sqrt{\sum_{i,v}|u_q(x_i,y_i,vT) - u(k_{nm}^l;x_i,y_i,vT)|^2}$$

例 1 取 $k^*(x,y,t) = 1 + x + y + txy + t^2(x^2 + y^2)$，$\Gamma_q = \Gamma$，$\Delta x = \Delta y = 0.1$，$T = 0.001$，$I = 100$，$\alpha = 0.0001$，$\{\psi_i(x,y)\}$ 为 $\{1,x,y,xy,x^2,y^2\}$，$\{\phi_i(t)\}$ 为 $\{1,t,t^2\}$。$k^*(x,y,t)$ 在基函数族下，系数所构成的向量为

$$k^* = \{1,1,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,1\}^T$$

取初始猜测向量为

$$k_{nm}^0 = (1.5,1.5,1.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,1.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,1.5,1.5)$$

对无测量误差、带有1%和5%随机测量噪声，经过15次迭代之后的模拟结果分别为

(0.999 983，1.000 03，1.000 04，－0.000 029，－0.000 023，

$-0.000\ 022, 0.000\ 072, -0.000\ 089, -0.000\ 104,$
$1.000\ 09, 0.000\ 038, 0.000\ 025, -0.000\ 105, 0.000\ 133,$
$0.000\ 161, -0.000\ 095, 0.999\ 946, 0.999\ 965)^T$,
$(0.998\ 684, 0.990\ 644, 1.008\ 23, 0.005\ 555, 0.014\ 497,$
$-0.012\ 042, 0.025\ 950, -0.088\ 973, -0.092\ 671,$
$1.106\ 32, 0.039\ 148, 0.081\ 417, 0.052\ 940, -0.040\ 353,$
$-0.081\ 680, -0.091\ 280, 1.034\ 84, 1.036\ 63)^T$ 和
$(1.041\ 60, 0.849\ 116, 0.809\ 138, 0.336\ 639, 0.048\ 361,$
$0.126\ 260, 0.111\ 977, 0.333\ 167, -0.231\ 307,$
$-0.092\ 735, -0.129\ 154, 0.252\ 417, -0.490\ 054,$
$0.497\ 876, 1.128\ 20, 0.669\ 435, 0.636\ 904, 0.146\ 251)^T$。

$ER(k_{nm}^l(x,y,t), k^*(x,y,t))$ 和 $ER(u_\eta, u_{nm}^l)$ 随迭代次数 l 的变化曲线见图 4.10 和 4.11。

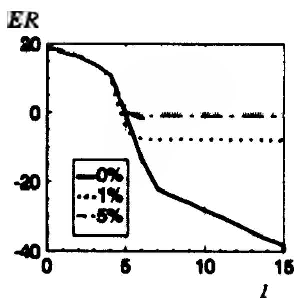


图 4.10 重构函数的精度随迭代次数的变化曲线

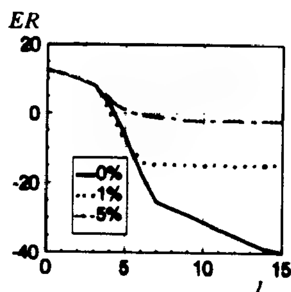


图 4.11 目标函数的极小值随迭代次数的变化曲线

若 $\Gamma_\eta = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$，其它各参数选取同上，则 $ER2(k_{nm}^l(x, y,t), k^*(x,y,t))$ 和 $ER2(u_\eta, u_{nm}^l)$ 随迭代次数 l 的变化曲线见图 4.12 和图 4.13。

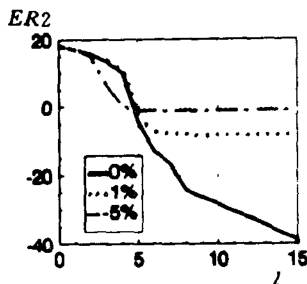


图 4.12 重构函数的精度随迭代次数的变化曲线

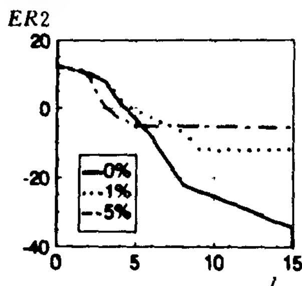


图 4.13 目标函数的极小值随迭代次数的变化曲线

例 2 取 $k^*(x,y,t)=1+(x+y)e^{0.3t}$，$\Gamma_q=\Gamma$，$\Delta x=\Delta y=0.1$，$T=0.01$，$I=100$，$\alpha=0.000\,1$，$\{\psi_i(x,y)\}$ 为 $\{1,x,y,xy,x^2,y^2\}$，$\{\phi_i(t)\}$ 为 $\{1,t,t^2\}$。初始猜测向量 k_{nm}^0 选为 $k_{nm}^0=(2,2,2,0,0,0,0,-0.9,-0.9,0,0,0,0,0,0,0.19,0.19,0,0)^T$。

对带有 0%、1% 和 5% 相对随机测量噪声，经过 15 次迭代之后的模拟结果分别为

$(1.000\,00, 1.000\,02, 1.000\,00, 0.000\,613, -0.000\,410, -0.000\,382, 0.001\,717, -0.302\,454, -0.302\,575, -0.001\,373, 0.004\,091, 0.004\,096, -0.002\,859, 0.045\,722, 0.046\,019, 0.000\,575, -0.005\,007, -0.005\,118)^T$，

$(0.999\,657\,7, 0.985\,497, 1.002\,15, 0.027\,388, 0.015\,650, -0.009\,474, 0.106\,067, -0.361\,816, -0.362\,130, -0.168\,350, -0.005\,147, 0.037\,982, -0.353\,506, 0.493\,656, 0.453\,947, 0.114\,387, -0.196\,663, -0.202\,593)^T$ 和

$(0.989\,234, 0.917\,431, 1.003\,03, 0.145\,267, 0.081\,006, -0.045\,707, 0.485\,45, -0.552\,095, -0.567\,155, -0.839\,528, -0.048\,809, 0.170\,006, -1.657\,24, 2.139\,91, 1.968\,71, 0.561\,105, -0.902\,020, -0.941\,575)^T$。

$ER(k_{nm}^{l}(x,y,t),k^{*}(x,y,t))$ 随迭代次数 l 的变化曲线见图 4.14。

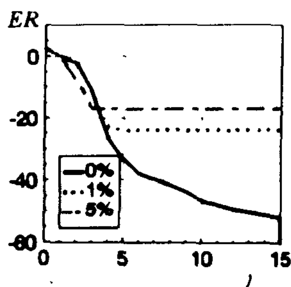


图 4.14　重构函数的精度随迭代次数的变化曲线

4.3.4　二维时变波动方程逆问题的模拟计算实例

在定解问题式(4.30a)～(4.30d)中取 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$，$r=2$，$\rho(x,y,t)=1$，$f(x,y,t)=(x^2+y^2-4)e^{t}$。

初始条件：

$$u_0(x,y)=x^2+y^2$$

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=-(x^2+y^2)$$

边界条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_4}=0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_3}=2e^{t}$$

求解波动方程的数值方法采用对 Ω 区域用五点为差分格式和对时间域内用二阶向后差分的全隐式格式。

$k(x,y,t)$ 的精确值 $k^{*}(x,y,t)$ 与每次迭代得到的近似解 $k_{nm}^{l}(x,y,t)$ 之间的距离用下列公式来衡量：

$$ER(k_{nm}^{l}(x,y,t),k^{*}(x,y,t))$$

$$= 10\log\sqrt{\frac{\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{\nu=0}^{I}|k_{nm}^{l}(x_i,y_j,\nu T)-k^*(x_i,y_j,\nu T)|^2}{N^2(I+1)}}$$

其中(x_i,y_j)为Ω的网格节点，N为节点总数，$(I+1)$为时间域上的节点总数。

$k^*(x,y,t)$ 相对应的 $u_q(x,y,t)$ 与 $k_{nm}^{l}(x,y,t)$ 相对应的 $u(k_{nm}^{l}(x,y,t);x,y,t)$ 在 Γ_q 之间的距离用下列公式来衡量：

$$ER(u_q,u_{nm}^{l}) = 10\log\sqrt{\sum_{j,\nu}|u_q(x_j,y_j,\nu T)-u(k_{nm}^{l};x_j,y_j,\nu T)|^2}$$

例 1　取$k^*(x,y,t)=1,\Gamma_q=\Gamma,\Delta x=\Delta y=0.1,T=0.01,$ $I=100,\alpha=0.0001,\{\psi_i(x,y)\}$为$\{1,x,y,xy,x^2,y^2\},\{\phi_i(t)\}$为$\{1,t,t^2\}$。初始猜测 $k_{nm}^{0}(x,y,t)=5$，即

$$k^0 = (5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)^T$$

$ER(k_{nm}^{l}(x,y,t),k^*(x,y,t))$ 和 $ER(u_q,u_{nm}^{l})$ 随迭代次数 l 的变化曲线见图 4.15 和图 4.16。

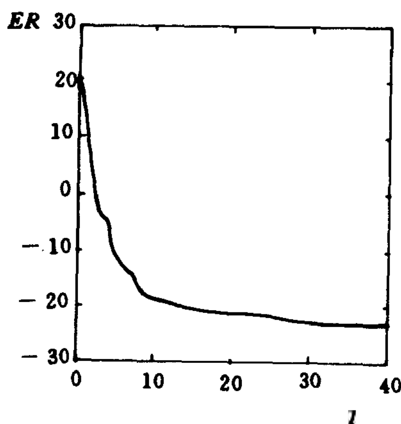


图 4.15　重构函数的精度随迭代次数的变化曲线

例 2　取$k^*(x,y,t)=1+(x^2+y^2)e^{0.3t},\Gamma_q=\Gamma,\Delta x=\Delta y$

$= 0.1, T = 0.01, I = 100, \alpha = 0.0001, \{\psi_i(x,y)\}$ 为 $\{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$，$\{\phi_i(t)\}$ 为 $\{1, t, t^2\}$。初始猜测向量 $\boldsymbol{k}_{nm}^0$ 选为 $\boldsymbol{k}_{nm}^0 = (1.5,0,0,0,1.5,1.5,0,0,0,0,-0.5,-0.5,0,0,0,0,0.5,0.5)^T$。

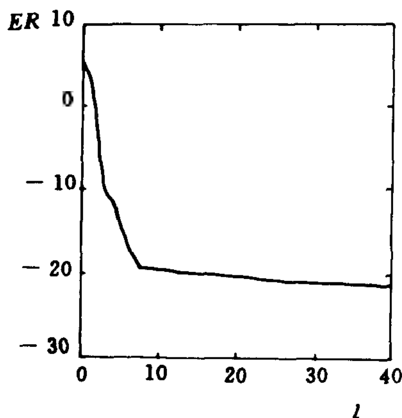


图 4.16　目标函数的极小值随迭代次数的变化曲线

$ER(k_{nm}^l(x,y,t), k^*(x,y,t))$ 和 $ER(u_\eta, u_{nm}^l)$ 随迭代次数 l 的变化曲线见图 4.17 和图 4.18。

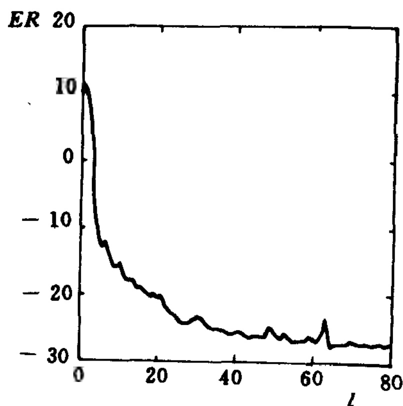


图 4.17　重构函数的精度随迭代次数的变化曲线

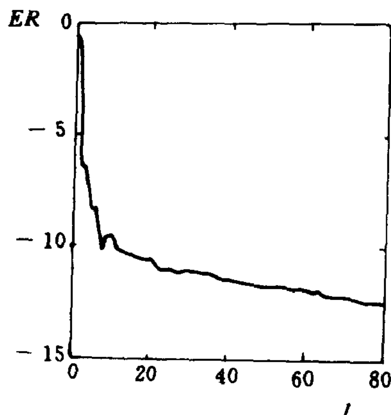


图 4.18 目标函数的极小值随迭代次数的变化曲线

4.4 逆问题的区域分裂算法与异步并行算法

我们知道，在解决某些工程实际问题(例如，大型结构工程分析，数值天气预报，三维飞机流场计算等等)，需要求解大型偏微分方程的数值解，计算区域往往是三维以上，并且区域范围很大，这些给数值计算造成了很大的困难。但是随着并行计算机和并行算法的发展，一类被称为区域分裂算法的偏微分方程数值解的新技术，得到了工程界和数学界专家的广泛重视，并且在实际计算中得到了成功应用。

简而言之，区域分裂算法就是将偏微分方程正问题(或逆问题)的定解区域 Ω 分裂成若干子域：$\Omega=\bigcup_{i=1}^{m}\Omega_i$。于是原问题的求解转化为在子域上进行求解，并且在各子域内的求解是相互独立的。这就使得人们很容易利用分布式并行计算来处理原始问题。

对于逆问题的区域分裂算法，还没有得到重视。然而，作者已在 1993 年首次成功地利用区域分裂算法讨论了二维扩散方程关于扩散系数逆问题的数值方法。

在讨论逆问题的区域分裂算法之前，我们首先介绍偏微分方程数值解的区域分裂算法和与异步并行技术。

4.4.1　偏微分方程正问题数值方法的区域分裂算法与异步并行算法

1. Schwarz 交替算法

考虑二维 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\nabla(p\nabla)u = f(x,y), & (x,y)\in\Omega \\ u|_{\Gamma} = \varphi(x,y) \end{cases} \tag{4.50}$$

其中 $\Gamma = \partial\Omega,\quad p(x,y) > 0$。

将区域 Ω 分裂成图 4.19 所示的有重叠部分的两个子区域 Ω_1 与 Ω_2 之并，即 $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega, \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing, \partial\Omega_1 = \Gamma_1 + \Gamma'_1, \partial\Omega_2 = \Gamma_2 + \Gamma'_2$。

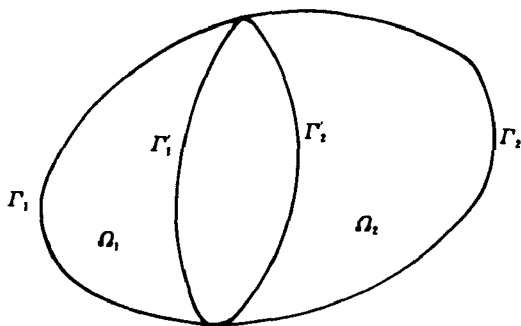


图 4.19　区域分裂示意图

引入空间

$$H'(\Omega) = \{u \mid u, u_x, u_y \in L_2(\Omega)\} \tag{4.51}$$

定义 $H'(\Omega)$ 中的内积

$$(u,v) = \int_{\Omega} uv + u_x v_x + u_y v_y \mathrm{d}\Omega \tag{4.52}$$

与范数

$$\| u \| = \sqrt{(u,u)} \tag{4.53}$$

则 $H'(\Omega)$ 是一个 Sobolev 空间。$H'(\Omega)$ 上的两个子空间 $H'_0(\Omega)$ 和 $H'_\varphi(\Omega)$ 分别是

$$H'_0(\Omega) = \{v | v \in H'(\Omega), \quad v|_\Gamma = 0\}$$

$$H'_\varphi(\Omega) = \{v | v \in H'(\Omega), \quad v|_\Gamma = \varphi\}$$

令

$$a(u,v) = \int_{\Omega} p(u_x v_x + u_y v_y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.54}$$

$$(f,v) = \int_{\Omega} fv \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.55}$$

则问题(4.50)的弱解形式为

$$\begin{cases} \text{求 } u \in H'_\varphi(\Omega), \quad \text{使得} \\ a(u,v) = (f,v), \quad \forall\, v \in H'_0(\Omega) \end{cases} \tag{4.56}$$

或

$$\begin{cases} \text{求 } u \in H'_\varphi(\Omega), \quad \text{使得} \\ J_\Omega(u) = \dfrac{1}{2} a(u,u) - (f,u) \Rightarrow \min \end{cases} \tag{4.57}$$

对于问题式(4.50)，任取初始函数 $u^0 \in H'_\varphi(\Omega)$，Schwarz交替迭代法有如下三种形式：

(1)

①
$$\begin{cases} \nabla p \nabla \hat{u}^{2i+1} = f, \quad (x,y) \in \Omega_1 \\ \hat{u}^{2i+1}|_{\Gamma_1} = \varphi(x,y) \\ \hat{u}^{2i+1}|_{\Gamma_1} = u^{2i} \end{cases} \tag{4.58}$$

$$u^{2i+1} = \begin{cases} \hat{u}^{2i+1}, & (x,y) \in \Omega_1 \\ u^{2i}, & (x,y) \in \Omega - \Omega_1 \end{cases} \tag{4.59}$$

②
$$\begin{cases}\nabla p\nabla \hat{u}^{2(i+1)}=f, & (x,y)\in\Omega_2\\ \hat{u}^{2(i+1)}|_{\Gamma_2}=\varphi(x,y)\\ \hat{u}^{2(i+1)}|_{\Gamma_2}=u^{2i+1}\end{cases}\tag{4.60}$$

$$u^{2(i-1)}=\begin{cases}\hat{u}^{2(i-1)}, & (x,y)\in\Omega_2\\ u^{2i+1}, & (x,y)\in\Omega-\Omega_2\end{cases}\tag{4.61}$$

(2)

①
$$\begin{cases}\text{求 }\hat{u}^{2i-1}\in H_\varphi^{2i}(\Omega_1),\quad\text{使得}\\ a(\hat{u}^{2i-1},\bar{v})=(f,\bar{v})\quad\forall\,\bar{v}\in H_0^{2i}(\Omega_1)\end{cases}\tag{4.62}$$

$$u^{2i-1}=\begin{cases}\hat{u}^{2i-1}, & (x,y)\in\Omega_1\\ u^{2i}, & (x,y)\in\Omega-\Omega_1\end{cases}\tag{4.63}$$

其中

$$H_\varphi^{2i}(\Omega_1)=\{v|v\in H'(\Omega_1),\quad v|_{\Gamma_1}=\varphi,\quad v|_{\Gamma'_1}=u^{2i}\}$$

$$H_0^{2i}(\Omega_1)=\{v|v\in H'(\Omega_1),\quad v|_{\Gamma_1}=0,\quad v|_{\Gamma'_1}=0\}$$

②
$$\begin{cases}\text{求 }\hat{u}^{2(i-1)}\in H_\varphi^{2i}(\Omega_2),\quad\text{使得}\\ a(\hat{u}^{2(i+1)},\bar{v})=(f,\bar{v}),\quad\forall\,\bar{v}\in H_0^{2i+1}(\Omega_2)\end{cases}\tag{4.64}$$

$$u^{2(i+1)}=\begin{cases}\hat{u}^{2(i-1)}, & (x,y)\in\Omega_2\\ u^{2i+1} & (x,y)\in\Omega-\Omega_2\end{cases}\tag{4.65}$$

其中

$$H_\varphi^{2i+1}(\Omega_2)=\{v|v\in H'(\Omega_2),\quad v|_{\Gamma_2}=\varphi,\quad v|_{\Gamma'_2}=u^{2i+1}\}$$

$$H_0^{2i+1}(\Omega_2)=\{v|v\in H'(\Omega_2),\quad v|_{\Gamma_2}=0,\quad v|_{\Gamma'_2}=0\}$$

(3)

①
$$u^{2i+1}=\begin{cases}v|\inf\limits_{v\in H_\varphi^{2i}(\Omega_1)}J_{\Omega_1}(v), & (x,y)\in\Omega_1\\ u^{2i}, & (x,y)\in\Omega-\Omega_1\end{cases}\tag{4.66}$$

②
$$u^{2i+1}=\begin{cases}v|\inf\limits_{v\in H_\varphi^{2i+1}(\Omega_2)}J_{\Omega_2}(v), & (x,y)\in\Omega_2\\ u^{2i+1}, & (x,y)\in\Omega-\Omega_2\end{cases}\tag{4.67}$$

其中

$$J_{\Omega_j}(v)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_j}p\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\Omega_j}fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad j=1,2 \tag{4.68}$$

从极小位能原理和虚功原理，不难看出，迭代格式(2)，(3)分别是(1)的两种变分形式。

定理1　上述三种Schwarz交替迭代收敛于问题式(4.50)的弱解。

带松弛因子 $\omega\in(0,2)$ 的Schwarz交替迭代法有下列两种形式：

$$(1)\begin{cases}\nabla p\nabla\hat{u}^{2i-1}=f, & (x,y)=\in\Omega_1\\ \hat{u}^{2i-1}|_{\Gamma_1}=\varphi\\ \hat{u}^{2i-1}|_{\gamma_1}=u^{2i}\end{cases} \tag{4.69}$$

$$u^{2i-1}=\begin{cases}\hat{u}^{2i-1}, & (x,y)\in\Omega-\Omega_1\\ u^{2i}+\omega(\hat{u}^{2i-1}-u^{2i}), & (x,y)\in\Omega_1\cap\Omega_2\\ u^{2i}, & (x,y)\in\Omega-\Omega_2\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\nabla p\nabla\hat{u}^{2(i+1)}=f, & (x,y)\in\Omega_2\\ \hat{u}^{2(i+1)}|_{\Gamma_2}=\varphi\\ \hat{u}^{2(i+1)}|_{\gamma_2}=u^{2i+1}\end{cases} \tag{4.70}$$

$$u^{2(i+1)}=\begin{cases}\hat{u}^{2(i+1)}, & (x,y)\in\Omega-\Omega_1\\ u^{2i-1}+\omega(\hat{u}^{2(i+1)}-u^{2i+1}), & (x,y)\in\Omega_1\cap\Omega_2,\\ u^{2i+1}, & (x,y)\in\Omega-\Omega_2\end{cases}$$

$$(i=1,2,3,\cdots)$$

定理2　带松弛因子 ω 的Schwarz交替迭代法收敛于问题式(4.50)的弱解。

当 $\Omega\in(1,2)$ 时，我们称之为Schwarz交替超松弛迭代法。

2. 并行Schwarz算法

上述介绍的经典Schwarz交替迭代算法，它不是一种并行算法，下面将构成并行Schwarz算法。为了简便起见，我们考虑将区

域分裂成两个子域的情形。

对问题式(4.50)的并行 Schwarz 算法如下：

第一步，选择初始近似 $u^0 \in H'_\varphi(\Omega)$。

第二步，分别计算两个子域上的边值问题：

$$(1)\begin{cases}\nabla p\nabla u_1^{2i-1}=f, & (x,y)\in\Omega_1\\ u_1^{i+1}|_{\Gamma_1}=\varphi & \\ u_1^{i+1}|_{\Gamma'_1}=u_1^i+\omega(u_2^i-u_1^i) & \end{cases}\tag{4.71}$$

$$(2)\begin{cases}\nabla p\nabla u_2^{2i-1}=f, & (x,y)\in\Omega_2\\ u_2^{i-1}|_{\Gamma_2}=\varphi & \\ u_2^{i-1}|_{\Gamma'_2}=u_2^i+\omega(u_1^i-u_2^i) & \end{cases}\tag{4.72}$$

其中 $\omega \in (0,2)$ 为松弛因子。

第三步，判别 $\| u_1^{i-1}-u_2^{i-1}\|_{\Omega_1\cap\Omega_2}<\varepsilon$ 是否满足精度要求。满足则停机，否则重复进入第二步过程。

上述计算过程是同步并行算法；即进行第 $i+1$ 步计算时，需要同时已知在 Ω_1、Ω_2 上的第 i 步的数值 u_1^i、u_2^i。而在每个子域上采用什么方法求解边值问题是没有什么限制的。

若用一个 CPU 计算问题(1)，用另一个 CPU 计算问题(2)，一旦两个问题未同时完成，则必有一个 CPU 处于等待过程，这样就会降低计算效率。这是同步并行算法的最大缺点。

3. 异步并行算法

为了避免其中某个 CPU 处于等待过程，我们采用如下方法处理。

不妨假设，问题(1)计算比问题(2)计算提前完成，则在 Γ'_1 上的数据为 $u_1^i+\omega(u_2^i-u_1^i)$，再进行问题(1)计算，但在 Γ'_1 上的 u_1^{i+1} 的公式中，采用最新的数据来代替，即

$$\begin{aligned}u_1^{i+1}|_{\Gamma'_1}&=u_1^i+\omega(u_2^i-u_1^i)\\&=[\alpha+(1-\alpha)\omega]u_2^i+(1-\alpha)(1-\omega)u_1^i\end{aligned}$$

其中 $\alpha \in (0,2)$ 为另一个松弛因子，它必须满足 $\alpha + (1-\alpha)\beta \in (0,2)$。

这样就构成了一种异步并行。容易理解，整个松弛过程将是混乱的。

定义 整体变量

$$\begin{cases} u(\Gamma') = (u(\Gamma'_1), u(\Gamma'_2)) \\ EPS = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ E \quad (\varepsilon \text{ 为精度参数}) \end{cases}$$

计算问题(1)为过程 P_1，计算问题(2)为过程 P_2，则过程 P_1、P_2 分别负责修改整体变量 $(u(\Gamma'_2), \varepsilon_1)$ 和 $(u(\Gamma'_1), \varepsilon_2)$。而整体变量分别可指定某个过程 P_i 负责修改。

上述异步并行算法的程序结构如下：

对给定的初始值 ω 和 EPS 及 E；

计算过程 $P_j(j=1,2)$

begin

if E > ϵ then

begin

$$(1)\begin{cases} \nabla p \nabla u^{2i+1} = f, \quad (x,y) \in \Omega_1 \\ u^{2i+1}|_{\Gamma_1} = \varphi \\ u_1^{2i+1}|_{\Gamma_1} = u^{2i} \end{cases}$$

$$u^{2i+1} = \begin{cases} \hat{u}^{2i+1}, \quad (x,y) \in \Omega - \Omega_1 \\ u^{2i} + \omega(\hat{u}^{2i+1} - u^{2i}), \quad (x,y) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ u^{2i}, \quad (x,y) \in \Omega - \Omega_2 \end{cases}$$

(2) $\omega^* (\hat{u}_i|_{\Gamma_i} - u(\Gamma'_i)) \to T_j$，若 $j=1$，则 $i=2$；若 $j=2$，则 $i=1$

(3) $\| T_j \| \to \epsilon_j$

(4) $u(\Gamma'_i) + T_j \to (\Gamma'_i)$

$\| \text{EPS} \| \to E \quad (\text{if } j = s)$

end

end

过程 P_1,P_2 并行计算，计算过程中总使用整体变量(即 $u(\Gamma'_1),u(\Gamma'_2)$)的最新数值，彼此无须等待，从而实现异并步行计算。当整体变量 E 小于 ϵ 时(即满足精度要求)，所有过程将同时结束。

应当注意，松弛因子的选择，不同的过程 P_j 可以选择不同的值。当其它过程没有完成时，P_j 过程再进行一次计算时，松弛因子也可选择不同的值。松弛因子的选择是否合适，对收敛速度有非常大的影响。

4.4.2　逆问题的区域分裂算法

为了简便起见，在不失一般性的情况下，考虑如下二维扩散方程中关于扩散系数 $k(x,y)$ 的逆问题：

$$\nabla(k(x,y)\nabla u) - \rho\frac{\partial u}{\partial t} + f(x,y,t) = 0,$$

$$(x,y)\in\Omega,\quad t>0 \tag{4.73}$$

初始条件：$u(x,y,0) = u_0(x,y),\quad (x,y)\in\Omega$　(4.74)

边界条件：$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = q(x,y,t),\quad (x,y)\in\Gamma=\partial\Omega$　(4.75)

附加条件：$u|_\Gamma = u_g(x,y,t),\quad t>0,\quad (x,y)\in\Gamma$　(4.76)

将区域 Ω 分裂成如图 4.19 所示的有重叠部分的两个子域 Ω_1 与 Ω_2 之并。

假设逆问题的解 $k^*(x,y)$ 在子域 Ω_1、Ω_2 分别记为 $k_1^*(x,y)$、$k_2^*(x,y)$。对选定的初始猜测函数，应用上小节介绍的 Schwarz 交替迭代或并行算法求得两个子域上的解 $u_1^0(x,y),u_2^0(x,y)$ 及 $\left.\dfrac{\partial u_1^0(x,y)}{\partial n}\right|_{\Gamma_1},\left.\dfrac{\partial u_2^0(x,y)}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}$。这样在每个子域上，便形成了两个相互独立的逆问题，即在

$$\begin{cases}\nabla k_i(x,y)\nabla u - \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} + f(x,y,t) = 0, & (x,y)\in\Omega_i \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & (x,y)\in\Omega_i \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_i} = q(x,y,t), & t > 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma'_i} = \left.\dfrac{\partial u_i^0(x,y,t)}{\partial n}\right|_{\Gamma'_i} & \\ u|_{\Gamma_i} = u_\eta(x,y,t), & (x,y)\in\Gamma_i\end{cases}$$

$$(i = 1,2) \quad (4.77)$$

中关于 $k_i(x,y)$ 的确定问题。

在每个子域上应用前面介绍的最佳摄动量法，可以分别求出一个较好的摄动量 $\delta k_i^0(x,y)(i=1,2)$ 和相应的解 $u'_i(x,y,t)(i=1,2)$，从而构成新的一组扩散系数：

$$k_i^1(x,y) = k_i^0(x,y) + \delta k_i^0(x,y), \quad i = 1,2 \quad (4.78)$$

采用 Schwarz 交替迭代的思想，交换 $\Gamma'_i(i=1,2)$ 上的数据，即令

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma'_1} = \left.\frac{\partial u'_2(x,y)}{\partial n}\right|_{\Gamma'_1} \quad (4.79a)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma'_2} = \left.\frac{\partial u'_1(x,y)}{\partial n}\right|_{\Gamma'_2} \quad (4.79b)$$

将 $k'_i(x,y), \Gamma'_i(i=1,2)$ 的新边界条件代入式(4.77)，再次求式(4.77)逆问题的近似解 $k_i^2(x,y)$ 及 $u_i^2(x,y,t)(i=1,2)$。这个过程一直进行下去，直到 $\| u_1^n(x,y,t) - u_\eta \|_{\Gamma_1}$，$\| u_2^n(x,y,t) - u_\eta \|_{\Gamma_2}$ 达到指定的精度要求为止。

应当指出：

(1) 由于一般不能给出较精确 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma'_i}(i=1,2)$ 的数值，因此在每个子域上应用最佳摄动迭代法求解逆问题的数值解时，无须

一定求出一个最佳扰动量。另外，根据应用最佳摄动量法的数值计算实例，一般在每个子域上迭代过程不宜超过 10 次。

(2) 由于两个子域上逆问题的相对独立性，因此在每个子域上逆问题求解的迭代次数可以选取不同的量。

(3) 在每个子域上应用最佳摄动量法求解逆问题的数值解时，需要交换的数据为 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在 $\Gamma'_i(i=1,2)$ 的数值。当其它子域上还没有提供崭新的 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 数据时，我们再利用最佳摄动量法迭代一次求出该子域上逆问题的数值解。

(4) 由于(2)、(3) 两个特点，我们很容易实现逆问题的异步并行计算。

4.4.3　逆问题的异步并行模拟计算实例

考虑的扩散方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}k(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial t}+(x^2+y^2+4)e^{t}=0,$$

$$(x,y)\in\Omega,\quad t>0$$

其中 $\Omega=[-1,1]\times[0,1]$。

初始条件： $u(x,y,0)=x^2+y^2$

边界条件： $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u(x,0,t)}{\partial n}\Big|_{[-1,1]}=0$,

$$\frac{\partial u(x,1,t)}{\partial n}\Big|_{[-1,1]}=2e^{t},\quad t>0$$

$$\frac{\partial u(-1,y,t)}{\partial n}\Big|_{[0,1]}=\frac{\partial u(1,y,t)}{\partial n}\Big|_{[0,1]}=2e^{t},\quad t>0$$

两个子域 Ω_1、Ω_2 分别为 $\Omega_1=[-1,0.1]\times[0,1]$，$\Omega_2=[-0.1,1]\times[0,1]$。如图 4.20 所示。在每个子域上扩散方程的数值方法采用有限差分的五点全隐式格式，并且 $\Delta x=\Delta y=0.1$，$\Delta t=0.1$。

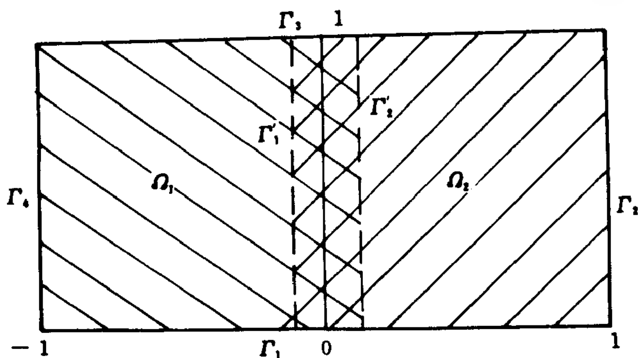


图 4.20 矩形域的分裂示意图

在每个子域上，扩散系数的精确值 $k_i^*(x,y)(i=1,2)$ 与每次迭代得到的近似解 $k_i(x,y)(i=1,2)$ 之间的逼近程度用下列公式来衡量：

$$ER_i(k_i^m,k^*)$$

$$=10\log\sqrt{\sum_{j,l}(k_i^m(x_j,y_l)-k_i^*(x_j,y_l))^2},\quad i=1,2$$

其中 (x_j,y_l) 为 $\Omega_i(i=1,2)$ 上的网络点。

$k_i^*(x,y)$ 相对应的 $u_\eta(x,y,t)$ 与 $k_i(x,y)$ 相对应的 $u(k_i(x,y);x,y,t)$ 在 $\Gamma_i(i=1,2)$ 上的逼近程度用下列公式来衡量：

$$ER_i(u_\eta,u_i^m)$$

$$=10\log\sqrt{\sum_{j,v}(u_\eta(x_j,y_j,vT)-u(k_i^m(x,y);x_j,y_j,vT))^2}$$

其中 (x_j,y_j) 为 Γ_i 上的测量点。

为了考虑测量噪声对迭代方法的影响和算法的稳定性，我们用 $u_\eta(x,y,t)(1+r\%\zeta)$（$\zeta$ 为[−1,1]上的随机数）来模拟带有 $r\%$ 的相对随机测量误差。

下列计算结果均在带有 80387 协处理器的 386DX33MHz 计算机上运行得到。

例1 取 $k^*(x,y)=1,\Gamma_q=\partial\Omega,\alpha=0.000\,1$ 在两个子域 $\Omega_i(i=1,2)$ 上选取初始猜测为 $k_1^0(x,y)=k_2^0(x,y)=1+2y+x^2+y^2$，采样周期 $T=0.1$，时间 t 的采样总点数 $I=10$，每个子域上都采用 $\{1,x,y,xy,x^2,y^2\}$ 作为基函数。对不同的初始猜测量、不同的模拟测量噪音，在 Ω_1、Ω_2 上逆问题分别进行 5 次最佳摄动量迭代，计算结果见表 4.3。

表 4.3

噪声 $r\%$	0		1		2
初始猜测 k_n^0	(5,0,0 0,0,0)	(1,2,0, 0,1,1)	(1,2,0, 0,1,1)	(5,0,0, 0,0,0)	(5,0,0, 0,0,0)
迭代次数	3	9	6	3	4
区域分裂法 计算时间(min)	35	105	35	71	47
非区域分裂法 计算时间(min)	26	40	12	26	14
结果值 k_n^*,Ω_1	0.999 9 1.1E-4 4.8E-4 3.9E-4 1.8E-4 -3.3E-5	0.999 8 3.1E-5 7.2E-4 5.7E-4 1.7E-4 -6.6E-5	1.013 7 -0.016 1 -0.046 4 -0.072 9 -0.028 5 -0.024 7	1.015 8 -0.018 1 -0.053 8 -0.079 0 -0.031 8 -0.023 5	1.127 7 -3.4E-4 -0.354 1 -0.455 6 -0.109 4 -0.085 4

续 表

结果值 k_n^m,Ω_1	1.000 2	1.000 2	0.986 5	0.986 1	0.950 5
	-1.8E-4	-1.4E-4	0.017 0	0.016 7	0.064 9
	-2.6E-4	-2.7E-4	0.001 3	-0.002 6	-0.017 5
	3.9E-4	3.4E-4	-0.015 4	-0.016 6	-0.051 4
	-5.6E-4	-7.0E-5	0.004 7	0.005 3	0.023 5
	-7.4E-5	-7.9E-5	0.012 3	0.012 5	0.060 2
$ER_1(k_1^0,k^*)$	16.44	7.840	7.840	16.44	16.44
$ER_2(k_2^0,k^*)$	16.44	13.37	13.37	16.44	16.44
$ER_1(k_1^m,k^*)$	-29.56	-28.21	-7.638	-7.298	-0.004
$ER_2(k_2^m,k^*)$	-31.56	-31.19	-12.07	-12.03	-5.810
$ER_1(u_\gamma,u_1^0)$	20.79	10.54	10.57	20.78	20.78
$ER_2(u_\gamma,u_2^0)$	20.79	12.57	12.58	20.80	20.85
$ER_1(u_\gamma,u_1^m)$	-35.48	-34.72	-13.70	-13.68	-6.876
$ER_2(u_\gamma,u_2^m)$	-37.74	-36.60	-18.65	-18.73	-11.28

例2 取$k^*(x,y)=1+y+xy+y^2$，$\Gamma_\gamma=\partial\Omega$，$\alpha=0.000\ 1$在两个子域$\Omega_i(i=1,2)$上选取初始猜测为$k_1^0(x,y)=k_2^0(x,y)=1+2y+x^2+y^2$，采样周期$T=0.1$，时间$t$的采样总点数$I=10$，每个子域上都采用$\{1,x,y,xy,x^2,y^2\}$作为基函数。对不同的初始猜测量、不同的模拟测量噪音，在Ω_1、Ω_2上逆问题分别交替进行3次和2次最佳摄动量迭代，计算结果见表4.4。

表 4.4

噪声 $r\%$	0		1		5
初始猜测 k_n^0	(3,0,0 0,0,0)	(1,1,1, 0,0,0)	(3,0,0, 0,0,0)	(1,1,1, 0,0,0)	(3,0,0, 0,0,0)
迭代次数	10	10	4	5	4
区域分裂法 计算时间(min)	58	58	23	30	23

续 表

非区域分裂法计算时间(min)	42	40	20	20	16
结果值 k_n^m,Ω_1	1.000 0 -9.2E-5 1.000 0 1.000 0 -6.6E-5 1.000 0	0.999 9 -1.3E-4 1.000 2 1.000 1 -8.2E-5 1.000 0	0.955 2 -0.006 0 1.135 8 1.036 7 0.008 7 0.964 0	0.961 4 0.001 5 1.123 0 1.025 5 0.010 7 0.966 8	0.828 5 0.021 5 1.550 6 1.068 9 0.049 6 0.844 1
结果值 k_n^m,Ω_2	1.000 0 -1.6E-6 1.000 0 1.000 0 1.1E-5 1.000 0	1.000 0 6.1E-5 0.999 9 0.999 9 -1.5E-5 1.000 1	1.008 8 0.006 3 0.954 9 0.988 3 5.6E-5 1.026 7	1.008 2 0.007 3 0.955 3 0.988 7 -7.3E-4 1.025 8	1.041 4 0.029 4 0.783 6 0.949 0 -4.4E-4 1.121 8
$ER_1(k_1^0,k^*)$	12.15	8.570	12.15	8.570	12.15
$ER_2(k_2^0,k^*)$	11.26	7.633	11.26	7.633	11.26
$ER_1(k_1^m,k^*)$	-37.75	-33.92	-5.748	-5.443	1.325
$ER_2(k_2^m,k^*)$	-38.62	-37.20	-10.22	-9.918	-3.051
$ER_1(u_q,u_1^0)$	17.07	10.61	17.06	10.66	17.00
$ER_2(u_q,u_2^0)$	16.29	4.922	16.31	5.321	16.40
$ER_1(u_q,u_1^m)$	-42.27	-39.09	-14.46	-14.36	-7.422
$ER_2(u_q,u_2^m)$	-42.40	-41.91	-18.35	-18.40	-11.36

对于无测量噪音，初始猜测函数 $k_1^0(x,y)=k_2^0(x,y)=3$，$ER_i(k_i^m,k^*)$ 与 $ER_i(u_q,u_i^m)(i=1,2)$ 关于迭代次数 m 的变化曲线见图 4.21。

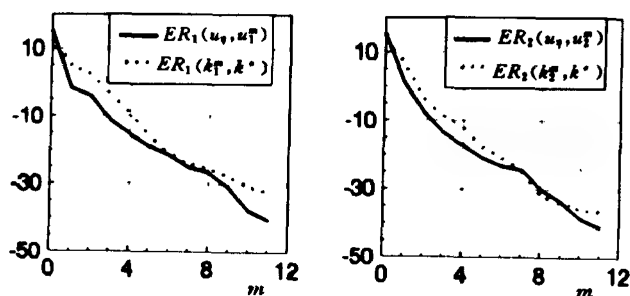


图 4.21 迭代次数与计算精度的关系

例3 取 $k^*(x,y)=e^{0.3(x-y)}$，$\Gamma_q=\partial\Omega$，$\alpha=0.0001$ 在两个子域 $\Omega_i(i=1,2)$ 上选取初始猜测为 $k_1^0(x,y)=k_2^0(x,y)=1+2y+x^2+y^2$，采样周期 $T=0.1$，时间 t 的采样总点数 $I=10$，每个子域上都采用 $\{1,x,y,xy,x^2,y^2\}$ 作为基函数。对不同的初始猜测量、不同的模拟测量噪音，在 Ω_1、Ω_2 上逆问题分别交替进行 4 次最佳摄动量迭代，计算结果见 4.5。

表 4.5

噪声 $r\%$	0		1		5
初始猜测 k_n^0	(5,0,0 0,0,0)	(1,1,1, 0,0,0)	(5,0,0, 0,0,0)	(1,1,1, 0,0,0)	(1,1,1, 0,0,0)
迭代次数	5	5	5	4	5
区域分裂法 计算时间(min)	35	35	35	28	35
非区域分裂法 计算时间(min)	26	26	23	23	20

续 表

结果值 k_n^m,Ω_1	1.015 0 0.324 2 0.270 0 0.062 6 0.054 3 0.050 2	1.010 5 0.328 5 0.289 1 0.077 8 0.061 7 0.046 4	1.024 5 0.327 5 0.255 9 0.007 6 0.044 5 0.012 1	1.019 4 0.351 3 0.296 8 0.038 4 0.070 5 0.001 5	1.197 5 0.482 3 −0.074 4 −0.461 9 0.027 1 −0.103 5
结果值 k_n^m,Ω_2	1.016 0 0.258 4 0.262 8 0.157 1 0.069 5 0.067 2	1.017 9 0.262 5 0.254 8 0.155 4 0.067 3 0.069 9	1.027 0 0.249 9 0.236 8 0.159 8 0.072 1 0.077 6	1.031 5 0.256 5 0.220 2 0.158 7 0.067 6 0.082 0	1.093 3 0.212 9 0.073 7 0.214 0 0.066 4 0.113 1
$ER_1(k_1^0,k^*)$	16.43	5.361	16.43	5.361	5.361
$ER_2(k_2^0,k^*)$	16.03	8.808	16.03	8.808	8.808
$ER_1(k_1^m,k^*)$	−12.47	−14.45	−7.962	−9.528	0.422 4
$ER_2(k_2^m,k^*)$	−13.46	−13.39	−10.58	−9.844	−3.650
$ER_1(u_q,u_1^0)$	20.77	5.849	20.77	5.906	6.151
$ER_2(u_q,u_2^0)$	20.31	10.57	20.32	10.30	10.78
$ER_1(u_q,u_1^m)$	−20.12	−22.94	−13.84	−13.62	−6.523
$ER_2(u_q,u_2^m)$	−21.62	−23.94	−16.92	−17.30	−10.71

对于表 4.5 中的最后一种情况，$k_i(x,y)$，$k_i^*(x,y)$ 和 $k_i^m(x,y)(i=1,2)$ 的计算结果分别见图 4.22 中的($a1$)，($b1$)，($c1$) 和 ($a2$)，($b2$)，($c2$)。

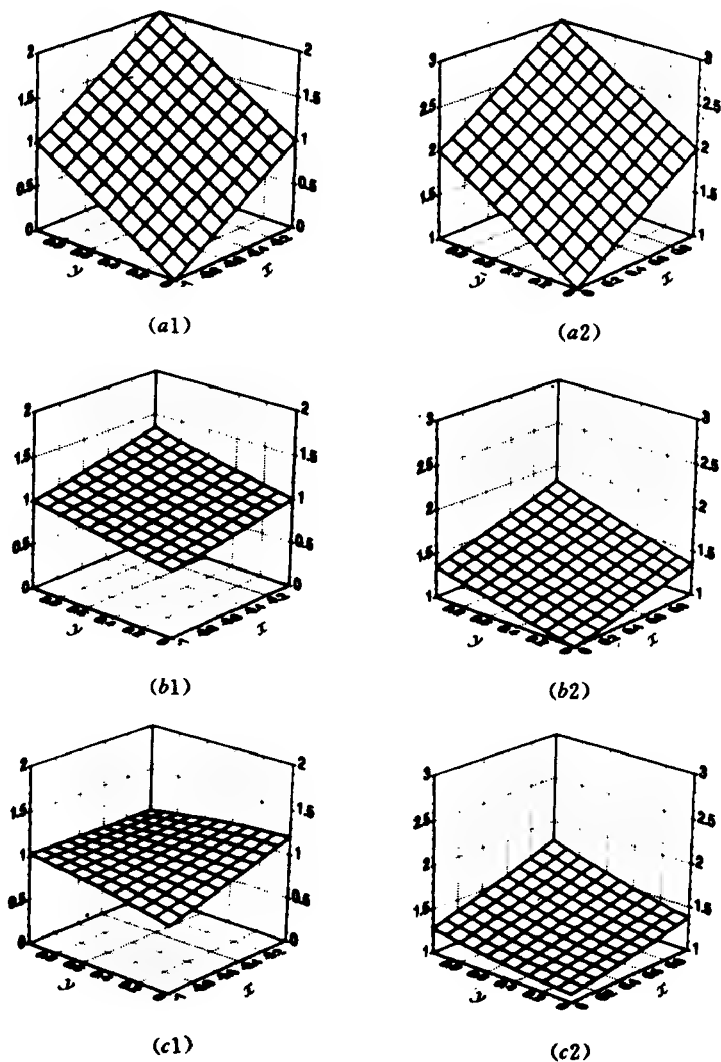


图 4.22

(a1)、(a2) 初始函数 (b1)、(b2) 精确函数

(c1)、(c2) 重构函数的三维图形

第五章 逆问题数值方法的应用

前面两章已经对两种逆问题的数值迭代方法作了比较详细的介绍。本节将针对工程中所遇到的六类逆问题，介绍它们的处理方法以及数值结果。

5.1 声学中的逆散射问题

医学中的成象问题促使人们越来越重视利用逆散射问题的数值方法解决非均匀介质的重构问题。最初，人们都集中在利用线性模型来研究该问题。但是，最近人们开始尝试直接处理原始的非线性 问题。本节将讨论声学逆散射问题中的二维非均匀质的非线性重构的最优化方法及数值结果。

5.1.1 逆散射问题的建模

假设二维物体放置在声速为 c_0 的自由空间中，并假设该物体在以 a 为半径的圆内，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$，$|\boldsymbol{x}|\leqslant a$，假设时谐平面声波以 α 角度，ω 频率，$k=\dfrac{\omega}{c_0}$ 为波数，向物体传播（如图 5.1 所示）。

声波在圆外 $|\boldsymbol{x}|\geqslant a$ 的传播速度为 c_0，吸收参数为 $\beta_0=0$。而在圆内 $|\boldsymbol{x}|<a$ 的传播速度为 $c(\boldsymbol{x})$，吸收参数为 $\beta(\boldsymbol{x})$。则折射系数

$$n(\boldsymbol{x})=\left(\frac{c_0}{c(\boldsymbol{x})}\right)^2+i\,\frac{\beta(\boldsymbol{x})}{k},\quad \boldsymbol{x}\in R^2 \tag{5.1}$$

散射问题为求一个速度势函数 u，满足下列三个等式：

$$\Delta u + k^2 n(x) u = 0 \tag{5.2}$$

$$u(x) = \mathrm{e}^{ikr\cos(\theta-\alpha)} + u^s(x) = u^i(x) + u^s(x) \tag{5.3}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0,\quad \text{Sommerfeld 辐射条件} \tag{5.4}$$

其中 $u^s(x)$ 为散射场，(r,θ) 为 $(x_1,x_2) = x$ 的极坐标参数，折射系数 $n(x)$ 为连续可微函数。

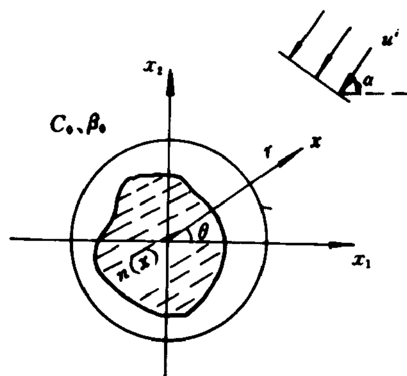


图 5.1　问题的区域与入射波示意图

在实际问题中，我们更关心当 $r\to\infty$ 时，$u^s(x)$ 的变化情况。当 r 充分大时，$u^s(x)$（称为远区散射场）的渐近表达式为

$$u^s(x) = \frac{\mathrm{e}^{-ikr}}{\sqrt{r}} F(\theta,k,\alpha) + O(r^{-\frac{3}{2}}) \tag{5.5}$$

一旦给定了 $n(x)$，则 $u^s(x)$ 唯一被确定，远区散射场也能被确定。

由于物体内部的两个结构参数 $c(x)$ 和 $\beta(x)$ 一般是未知的，即 $n(x)$ 为未知函数，而远区散射场 $u^s(x)$ 可以通过测量得到。因此，成像问题就是由可测量函数 $F(\theta,k,\theta)$ 和式(5.1)～(5.5)来

确定 $n(x)$，从而确定物体结构的两个参数 $c(x)$ 和 $\beta(x)$。

5.1.2　改型的对偶空间方法

首先介绍对偶空间方法。

对于某物体的远区方向图 $F(\theta,k,\alpha)$，由下列积分方程确定一个新的辅助函数 $g(\theta,k)\in L^2[-\pi,\pi]$：

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta,k,\alpha)g(\theta,k)\mathrm{d}\theta=\sqrt{\frac{2}{\pi k}}e^{-\frac{\pi}{4}i} \tag{5.6}$$

于是 Herglotz 波函数

$$v(r,\theta,k)=\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta,k)e^{-ikr\cos(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi$$

因此，未知量 $n(x)$ 由下列所谓的超定内传播问题确定：

$$\Delta w+k^2n(x)w=0,\quad x\in\Omega_a \tag{5.7}$$

$$\Delta v+k^2v=0,\quad x\in\Omega_a \tag{5.8}$$

$$w(x)-v(x)=\mathrm{H}_0^{(1)}(kr),\quad x\in\partial\Omega_a \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial w(x)}{\partial r}-\frac{\partial r(x)}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{H}_0^{(1)}(kr),\quad x\in\partial\Omega_a \tag{5.10}$$

其中 $\Omega_a=\{x|\,\|x\|<a\}$，$\mathrm{H}_0^{(1)}$ 为零级第一类 Hankel 函数。

由上述超定内传输问题来确定 $n(x)$ 的方法称之为对偶空间方法。

下面详细介绍改型的对偶空间方法。

引入一个辅助问题：选取一个参数 $\lambda(>0)$，$h(x)$ 为下列方程的解：

$$\Delta h+k^2h=0,\quad x\in R^2\backslash\Omega_a \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial h}{\partial r}+i\lambda h=0,\quad x\in\partial\Omega_a \tag{5.12}$$

$$h(x)=\mathrm{e}^{ikr\cos(\theta-\alpha)}+h^s(x) \tag{5.13}$$

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial h^s}{\partial r}-ikh^s\right)=0 \tag{5.14}$$

我们用 F_λ 表示为 h^s 的远区方向图，则

$$h^s(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} F_\lambda(\theta,k,\alpha) + O(r^{-\frac{3}{2}}) \tag{5.15}$$

$F_\lambda(\theta,k,\alpha)$ 具有解析表达式，即不需要求上述偏微分方程的数值解。它可展开成如下的 Fourier 级数形式：

$$F_\lambda(\theta,k,\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-\frac{\pi}{4}i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{|n|}(k)(-i)^{|n|} e^{in(\theta-\alpha)} \tag{5.16}$$

其中

$$a_{|n|}(k) = -i^n \frac{kJ'_n(ka) + i\lambda J_n(ka)}{k(H_n^{(1)}(ka))' + i\lambda H_n^{(1)}(ka)} \tag{5.17}$$

$J_n(ka)$ 为 n 阶 Bessel 函数，$H_n^{(1)}(ka)$ 为第一类 n 阶 Hankel 函数。

对远区方向图 $F(\theta,k,\alpha) - F_\lambda(\theta,k,\alpha)$，由下列积分方程确定一个辅助函数 $g_p(\theta,k) \in L^2[-\pi,\pi]$：

$$\int_{-\pi}^{\pi} [F(\theta,k,\alpha) - F_\lambda(\theta,k,\alpha)] g_p(\theta,k) d\theta$$

$$= (-1)^p \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{i(\frac{p}{2}\pi - \frac{\pi}{4} - p\alpha)} \tag{5.18}$$

其中 p 为整数，$\alpha \in [-\pi,\pi]$。

由 $g_p(\theta,k)$ 确定的 Herglotz 波函数为

$$v_p(r,\theta,k) = \int_{-\pi}^{\pi} g_p(\varphi,k) e^{-ikr\cos(\theta-\varphi)} d\varphi \tag{5.19}$$

将 $F(\theta,k,\alpha)$、$g_p(\theta,k)$ 都展开成 $e^{in\theta}$ 形式的 Fourier 级数，得

$$F(\theta,k,\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-\frac{\pi}{4}i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\alpha,k) e^{in\theta} \tag{5.20}$$

$$g_p(\theta,k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{pn}(k) e^{in\theta} \tag{5.21}$$

其中 $g_{pm}(k)$ 为待定参数。

将式(5.16)、(5.20)和(5.21)代入式(5.18)得

$$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}[b_{n}(\alpha,k)-(-i)^{|n|}e^{in\alpha}a_{|n|}(k)]g_{pn}(k)=i^{p}e^{ip\alpha}$$

(5.22)

为了计算 $g_p(\theta,k)$ 的近似值，首先对式(5.22)截断成有限项之和，并且采用 Tikhonov 正则化方法进行求解。

当已知入射场从下列各种角度入射时

$$\alpha_j=\frac{k\pi(j-1)}{N_a},\quad 1\leqslant j\leqslant N_a \tag{5.23}$$

则对每个 p 和 k，我们由求下列最优化来确定 $g_{pn}(k)$ 的近似值 $\{g_{pn}^{\gamma}(k)\}_{n=-N}^{N}$：

$$\frac{1}{N_a}\sum_{j=1}^{N_a}\left(2\pi\sum_{n=-N}^{N}[b_{n}(\alpha_j,k)-(-i)^{|n|}e^{in\alpha_j}a_{|n|}(k)]g_{pn}^{\gamma}(k)\right.$$
$$\left.-i^{p}e^{ip\alpha_j}\right)^2+\gamma^2\sum_{n=-N}^{N}n^2|g_{pn}^{\gamma}(k)|^2 \tag{5.24}$$

其中 γ 为正则化参数。

当远区方向图 $F(\theta,k,\alpha_j)$ 在$[0,2\pi]$上的 $\theta_i=\frac{\pi}{N}i\quad(i=0,\pm1,\cdots,\pm N)$ 处已知时，$\{b_{n}(\alpha_j,k)\}_{n=-N}^{N}$ 可由快速 Fourier 变换计算得到。

因此，满足式(5.19)的近似 Herglotz 波函数 $v_{p\gamma}(r,\theta,k)$ 为

$$v_{p\gamma}(r,\theta,k)=2\pi\sum_{n=-N}^{N}(-i)^{n}J_{|n|}(kr)g_{pn}^{\gamma}(k)e^{in\theta} \tag{5.25}$$

另一方面，在 Ω_a 之外，$n(x)\equiv1$，则有

$$\Delta w_{p\gamma}^{s}+k^2w_{p\gamma}^{s}=0,\quad x\in R^2\backslash\bar{\Omega}_a \tag{5.26}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+i\lambda\right)w_{p\gamma}^{s}=\left(\frac{\partial}{\partial r}+i\lambda\right)(H_p^{(1)}(kr)e^{ip\theta}-v_{p\gamma}(r,\theta,k)),$$
$$x\in\partial\Omega \tag{5.27}$$

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}-ik\right)w_{p\gamma}^{s}=0 \tag{5.28}$$

注意到这里方程的解 $w^s_{p\gamma}$ 是与 $n(x)(x\in\Omega)$ 无关,并且它的近似解可用下列展开式表示:

$$w^s_{p\gamma}=2\pi\sum_{n=-N}^{N}(-i)^n \mathrm{J}_{|n|}(kr)w^s_{p\gamma n}\mathrm{e}^{in\theta} \tag{5.29}$$

从而待定函数 $n(x)$ 的重构问题由下列方程确定:

$$\Delta w_p+k^2n(x)w_p=0,\quad x\in\Omega_a \tag{5.30}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+i\lambda\right)(w_p-\mathrm{H}^{(1)}_p(kr)\mathrm{e}^{ip\theta})=0,\quad x\in\partial\Omega_a \tag{5.31}$$

$$w_p=v_{p\gamma}+w^s_{p\gamma},\quad x\in\partial\Omega_a \tag{5.32}$$

其中 p 为整数。

5.1.3 数值计算过程及算例

对区域 Ω_a 作如图 5.2 所示的三角形网格 τ_h(h 为三角形的最大边长),$\psi_k(x)(\in\tau_h)$ 为指示性基函数(即:当 x 在第 k 个区域时,$\psi_k(x)$ 为 1,否则为 0),$n(x)$ 离散后的函数记为 $n_h(x)$,则

$$n_h(x)=\sum_{k\in\tau_h}n_k\psi_k(x) \tag{5.33}$$

对一个给定的 $n(x)$,采用等参数的三阶有限元方法求解式(5.30)、(5.31)椭圆方程的数值解。并且在关于网格 τ_h 下,方程式(5.30)、(5.31)的解记为 w^h_p。

令 S_M 为 $\{\mathrm{e}^{in\theta}\}^M_{n=-M}$ 所张成的三角函数空间,并在 $\partial\Omega_a$ 上定义一个目标函数

$$J_{\gamma_1}(n_h,k)=\frac{1}{2P+1}\sum_{p=-P}^{P}\|P_M(w^h_p-v_{p\gamma}-w_{p\gamma})\|^2_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega_a)}+\gamma_1^2\|D_hn_h\| \tag{5.34}$$

其中 P_M 是从 L^2 到 S_M 的投影算子,$\|D_hn_h\|$ 为稳定性函数,γ_1 为正则化参数。

利用快速 Fourier 变换计算 $P_Mw^h_p$,$P_Mv_{p\gamma}$ 由式(5.25)直接得到,$P_Mw^s_{p\gamma}$ 由式(5.29)得到。

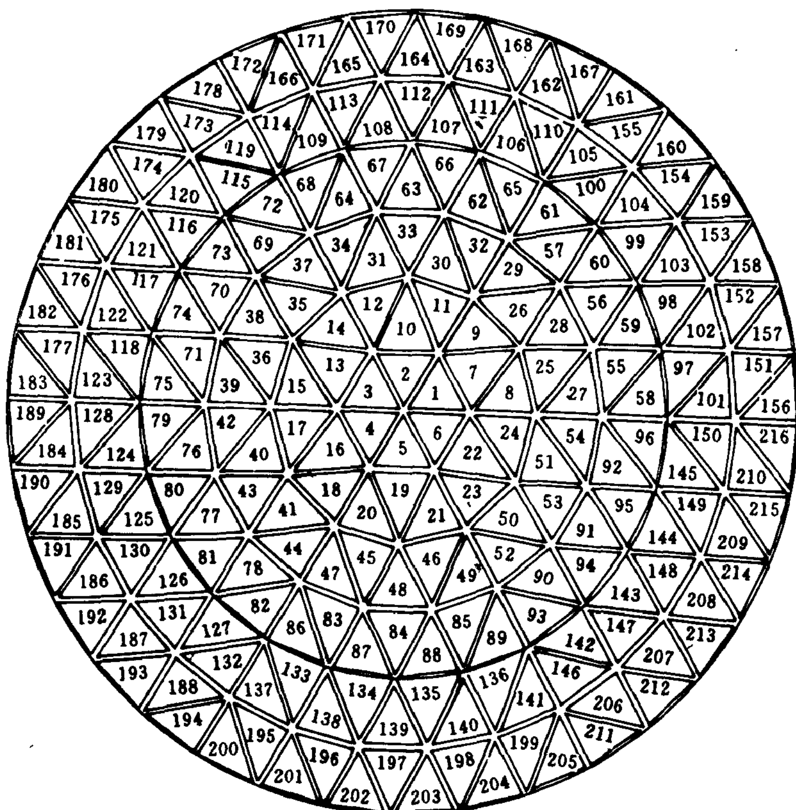


图 5.2　区域的三角形网格剖分示意图

对于较小的 P，为了得到足够的数据作逆问题，我们必须已知多个波数上的数据。不妨假设在 $k_1,\cdots,k_{N_k}$ 波数上的数据已知，则逆问题可变成求下列关于 n_k 的目标函数的最小值：

$$J_{\gamma_1}(n_k) = \frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k} J_{\gamma_1}(n_k, k_i) \tag{5.35}$$

目标函数的最优化方法采用 Levenberg - Marquardt 方法处理。

n_k 的未知量总数 N_{τ_k} 与 M、P、N_k 应满足下列关系式：

$$N_k(2P+1)(2M+1) \geqslant N_{\tau_k} \tag{5.36}$$

P 值的选取一般不宜取得太大，因为当 P 增大时，说明 $v_{p\gamma}$ 取得远区场的高阶 Fourier 模项，而这些项一般精度难以控制。

设 n^*、n_k 为原始精确值和重构的值，重构的精度用下列公式来衡量：

$$\| n_k - n^* \| = \left(\frac{\sum |n^*(a_i) - n_k(a_i)|^2}{\sum |n^*(a_i)|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.37}$$

其中 a_i 为每个三角元的中点位置坐标。

关于 n^* 重构的数值模拟过程：

第一步：对给定的 n^*，求式(5.2) ～ (5.4) 的散射问题，并求得远区方向图 $F(\theta, k, \alpha)$。将 $F(\theta, k, \alpha)$ 作为模拟测量值；

第二步：对选定的 N 和 γ，利用式(5.24) 确定 $\{g_{pn}^{\gamma}(k)\}_{-N}^{N}$。

第三步：利用式(5.25) 求得 $v_{p\gamma}$。

第四步：求式(5.26) ～ (5.28) 的外散射问题，并由式(5.29) 确定 $w_{p\gamma n}^{\prime}(h)$。

第五步：对选定的 $n_k(x)$，利用三角元的有限元方法求式(5.30)、(5.31) 定解问题的数值解 w_p^h，并求得在 S_M 上的投影 $P_M w_p^h$。

第六步：对选定的 γ_1，采用 Levenberg - Marquardt 方法求 $J_{\gamma_1}(n_k, k)$ 或 $J_{\gamma_1}(n_k)$ 的非线性最优化问题的近似解 $n_k(x)$。

第七步：判别近似解 $n_k(x)$ 是否满足精度，若满足，则停机；否则，转入第五步。

例 1　令 $r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}$，$r_2 = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}$

$$n^*(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 + \cos 2\pi r_1), & r_1 < 0.5 \\ \frac{1}{2}(3 + \cos 2\pi r_2), & r_2 < 0.5 \\ 1, & \text{其它} \end{cases}$$

$a = 1, \lambda = 3, N = 6, y = 0.01, h = 0.124, M = 6, \gamma_1 = 0.0029$。精确值 $n^*(x)$ 和重构值 $n_h(x)$ 的图形见图 5.3 和图 5.4。图中所画的函数已经过三角形网格到矩形网格插值过程的转化。

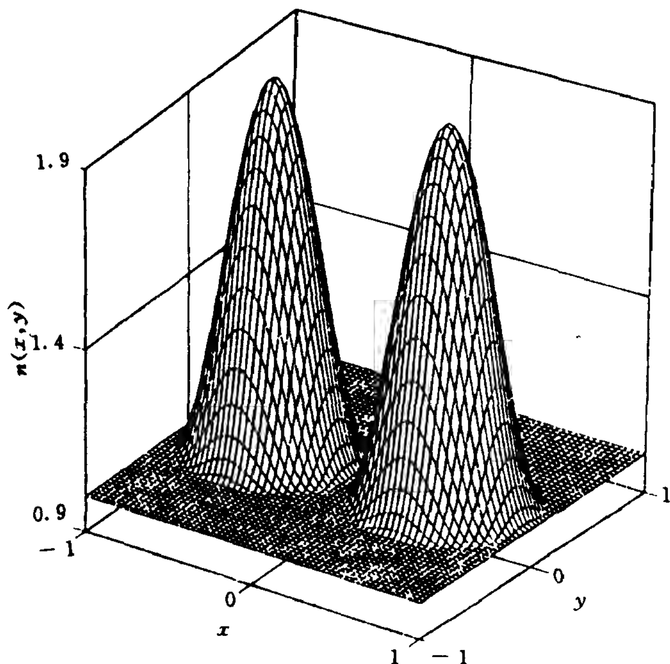


图 5.3　精确函数 $n^*(x)$ 的图形

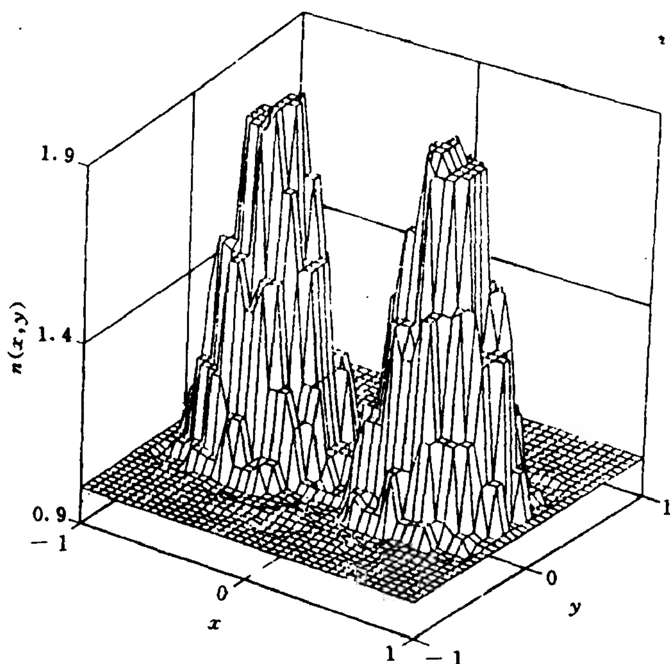


图 5.4 重构函数 $n_h(x)$ 图形

例 2 令 $r_1=\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2}$

$$n^*(x,y)=\begin{cases}2, & \frac{1}{10}<r_1<\frac{2}{3}\\ 3, & r_1<\frac{1}{10}\\ 1, & \text{其它}\end{cases}$$

$a=1, \lambda=3, N=6, \gamma=0.0001, h=0.124, M=7, \gamma_1=0.00068$。精确值 $n^*(x)$ 和重构值 $n_h(x)$ 的图形见图 5.5 和图 5.6。图中所画的函数已经过三角形网格到矩形网格插值过程的转化。

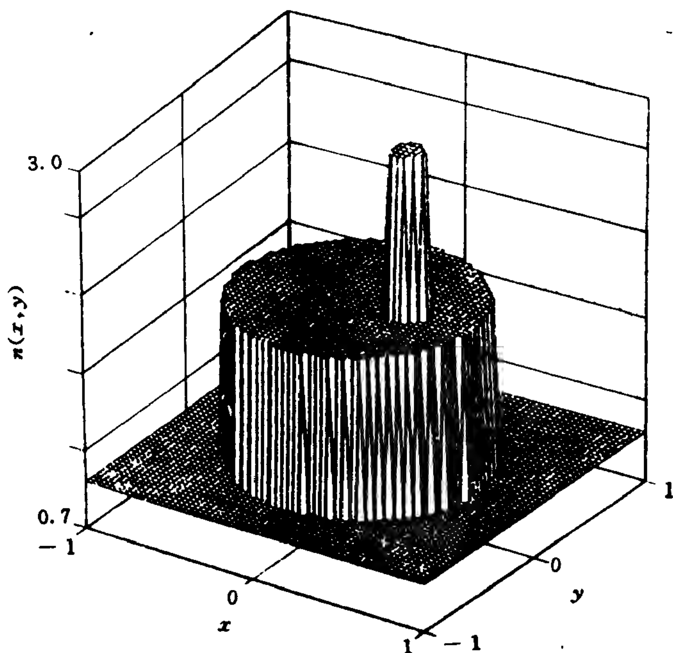


图 5.5 精确函数 $n^*(x)$ 的图形

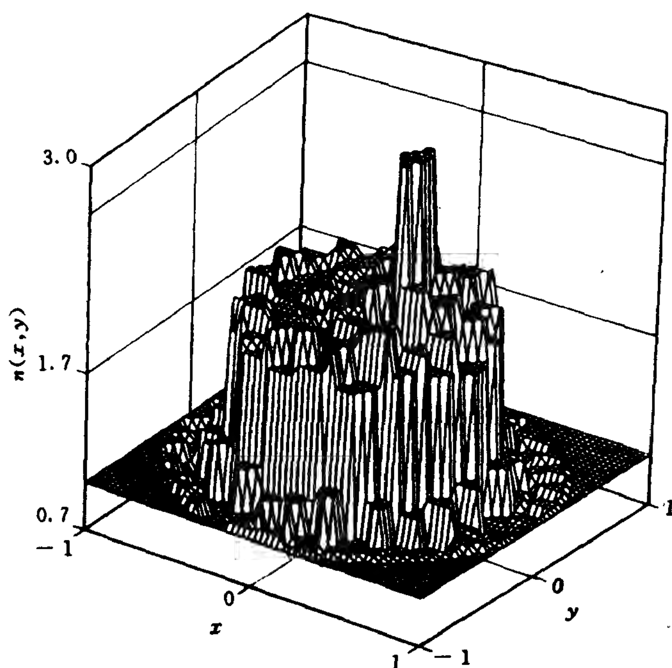


图 5.6 重构函数 $n_k(x)$ 的图形

5.2 电磁成象的一种数值方法

在超大规模集成电路的激光扫描计量技术和超级高性能探测雷达中的一个基本问题是要从已知的入射电磁场和测量到的散射场来在线识别物体的形状和它的物质结构。发展解一般的Maxwell 电磁场方程的多参数逆散射问题的高效、高精度的数值方法对解决基本问题是非常必要的。对于解决声学中的逆散射问题有许多数值方法，我们在上一节已经介绍了一种非线性最优化方法。与声学中的逆散射问题相比，电磁逆散射问题更为复杂。

在过去10多年里，在电磁成象方面，人们重视研究了谱方法，即所谓的衍射断层成象技术(Diffraction Tomography)，并用于超声波和微波成象技术中。由于该技术在解决逆问题时采用显式表达式，并与快速Fourier变换相结合，使得该技术达到实用化。然而，由于衍射断层成象技术是在对散射场进行Born逼近或Rytov逼近基础上得到的，因此，该技术不能应用于具有极化相关和具有一定吸波能力的物质中去，这导致了难以解决许多医学成象、雷达目标识别等问题。

本节将介绍利用近区散射场来重构有耗电介物体的复介电参数的一类数值迭代方法。

5.2.1　问题的提出

假设一个各向同性的非均匀有耗电介物体 D_{obj}，复介电参数为 ε^*，它被放置在周围介电参数为 ε_1^0 的物质 D_1 之中。对二维情况，入射电磁场与物体的几何图形见示意图5.7。

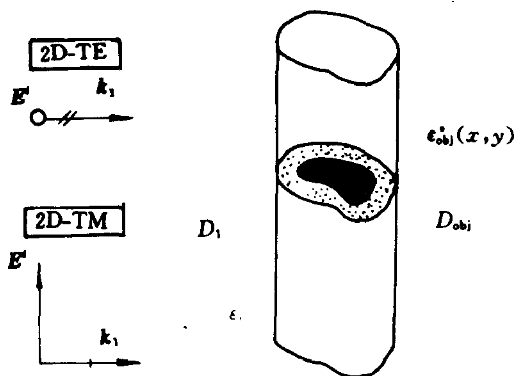


图5.7　二维散射体几何图形

入射电磁场为时谐($e^{-j\omega t}$,ω 为入射频率)平面波 $\boldsymbol{E}_v^i$,它从 N_v 个不同角度,N_f 个不同频率照射到物体 D_{obj},并且,物体的散射场 $\boldsymbol{E}_v^s$ 在物体的周围 M 个不同点上测量得到。其总场 $\boldsymbol{E}_v^T=\boldsymbol{E}_v^i+\boldsymbol{E}_v^s$ 在 D_1 和 D_{obj} 内满足 Maxwell 方程组:

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}-j\omega\boldsymbol{D}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=j\omega\boldsymbol{B}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,\quad\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\quad\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\quad\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}\end{cases}\tag{5.38}$$

在 D_{obj} 的边界上满足连续性条件

$$n\times\boldsymbol{E}_1=n\times\boldsymbol{E}_2,\quad n\cdot\boldsymbol{B}_1=n\cdot\boldsymbol{B}_2\tag{5.39}$$

式中 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$ 分别为界面两侧媒质中的电场强度,$\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{B}_2$ 分别为界面两侧媒质中的磁感应强度,n 为 D_{obj} 的边界上的外法线方向。

利用 Green 函数法将上述方程组化简为积分方程

$$\boldsymbol{E}_v^T(\boldsymbol{r},\omega,\varepsilon)=\boldsymbol{E}_v^i(\boldsymbol{r},\omega)+\int_{D_{obj}}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)O(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}_v^T(\boldsymbol{r}',\omega,\varepsilon)\mathrm{d}\boldsymbol{r}',$$

$$\boldsymbol{r}\in D_1\cup D_{obj}\tag{5.40}$$

其中并矢 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)$ 为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=\frac{j}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\quad(\text{二维,TM 入射场})$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=\left(I_2+\frac{1}{k_0^2}\text{grad div}'\right)\frac{j}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$$

(二维,TE 入射场,I_2 为二阶单位阵)

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},\omega)=\left(I_3+\frac{1}{k_0^2}\text{grad div}'\right)\frac{j}{4\pi}\frac{e^{jk_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

(三维,I_3 为三阶单位阵)

$$O(\boldsymbol{r}')=\omega^2\mu_0[\varepsilon^*(\boldsymbol{r}')-\varepsilon_1^0]$$

$$\boldsymbol{E}_v^T(\boldsymbol{r},\omega,\varepsilon^*)=\boldsymbol{E}_v^i(\boldsymbol{r},\omega)+\boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r},\omega,\varepsilon^*)$$

其中 $k_0=\omega^2\mu_0\varepsilon_1^0$ 为 D_1 内的波数。

不难看出,在一般情况下,待定参数 $\varepsilon^*(\boldsymbol{r})$ 与散射场 $\boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r},\omega,$

ε^*）之间是非线性的。

若物体 D_{obj} 是弱散射体（即 $|\boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r}',\omega,\varepsilon^*)| \ll |\boldsymbol{E}_v^i(\boldsymbol{r}',\omega)|,\boldsymbol{r}' \in D_{obj}$，则关于 $\varepsilon^*(\boldsymbol{r}')$ 重构的非线性问题可转化为下列第一类 Fredholm 积分方程的求解问题：

$$\boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r},\omega,\varepsilon) = \int_{D_{obj}} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)O(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}_v^i(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{5.41}$$

这就是所谓的 Born 逼近方法。

下面我们将直接讨论式(5.40) 重构 $O(\boldsymbol{r}')$，即 $\varepsilon^*(\boldsymbol{r}')$ 的方法。

5.2.2　电磁成象的一种数值迭代方法

首先对 $\varepsilon^*(\boldsymbol{r}^*)$ 进行离散逼近，设其一般形式为

$$\varepsilon^*(\boldsymbol{r}') \approx \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \varphi_i(\boldsymbol{r}') = \Phi_N^T(\boldsymbol{r}')\varepsilon_N \tag{5.42}$$

其中 $\{\varphi_i(\boldsymbol{r}')\}$ 为 D_{obj} 上的一个基函数族，$\varepsilon_N = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_N)^T$，$\Phi_N^T(\boldsymbol{r}') = (\varphi_1(\boldsymbol{r}'),\cdots,\varphi_N(\boldsymbol{r}'))$。

于是式(5.40) 可表示为

$$\boldsymbol{E}_v^T(\boldsymbol{r},\omega,s) = \boldsymbol{E}_v^i(\boldsymbol{r},\omega) + \int_{D_{obj}} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\omega^2\mu_0 \times \Big[\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \varphi_i(\boldsymbol{r}') - \varepsilon_1^0\Big]\boldsymbol{E}_v^T(\boldsymbol{r},\omega,s)\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{5.40'}$$

对以 N_j 个不同频率从 N_v 个不同入射方向的入射场，并且在 M 个不同点测量得到的散射场 $\boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r},\omega,\varepsilon)$，关于 $\varepsilon^*(\boldsymbol{r}')$ 的成象问题可由下列非线性最优化问题确定：

$$\min_{\varepsilon_N \in C^N} \| \boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r},\omega,\varepsilon_N) - \boldsymbol{E}_v^*(\boldsymbol{r},\omega,\varepsilon^*) \|_{(r,\omega,v)\in\Gamma} \tag{5.43}$$

其中 $\Gamma = \{\boldsymbol{r}_m,\omega_l,v) \mid m = 1,2,\cdots,M, l = 1,2,\cdots,N_j, v = 1,2,\cdots,N_v\}$，$C^N$ 为 N 维复空间，$\boldsymbol{E}_v^*$ 表示测量数据，$\boldsymbol{E}_v^s$ 表示数值计算得到的数据。并且，$\boldsymbol{r}_m$ 是在区域 D_1 中的测量点位置，$\boldsymbol{E}_r^s(\boldsymbol{r},\omega,\Phi_N^T(\boldsymbol{r}')\varepsilon_N)$ 记为 $\boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r},\omega,\varepsilon_N)$。

利用最佳摄动量方法将式(5.43) 转化为下列迭代过程：

$$\varepsilon_N^0 + \delta\varepsilon_N^0 \Rightarrow \varepsilon_N^0 \tag{5.44}$$

其中 ε_N^0 为初始猜测向量，$\delta\varepsilon_N^0$ 由下列最优化问题确定：

$$\min_{\delta\varepsilon_N^0 \in C^N} \| \boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r},\omega,\varepsilon_N^0 + \delta\varepsilon_N^0) - \boldsymbol{E}_v^*(\boldsymbol{r},\omega,\varepsilon^*) \|^2_{(r,\omega,v)\in\Gamma} + \alpha S(\delta\varepsilon_N^0) \tag{5.45}$$

$$\approx \min_{\delta\varepsilon_N^0 \in C^N} \sum_{v=1}^{N_v} \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{N_f} |\boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r}_m\omega_l,\varepsilon_N^0) + \nabla^T_{\varepsilon_N^0} \boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r}_m,\omega_l,\varepsilon_N^0)\delta\varepsilon_N^0 - \boldsymbol{E}_v^*(\boldsymbol{r}_m,\omega_l,\varepsilon^*)|^2 + \alpha S(\delta\varepsilon_N^0)$$

其中 α 为正则化因子，$S(\delta\varepsilon_N^0)$ 为稳定性泛函。

令
$$b_{m,l,v} = \boldsymbol{E}_v^*(\boldsymbol{r}_m,\omega_l,\varepsilon^*) - \boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r}_m,\omega_l,\varepsilon_N^0)$$
$$a^T_{m,l,v} = \nabla^T_{\varepsilon_N^0} \boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r}_m,\omega_l,\varepsilon_N^0)$$

则式(5.45)可简写为

$$\min_{\delta\varepsilon_N^0 \in C^N} \sum_{v=1}^{N_v} \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{N_f} |a^T_{m,l,v}\delta\varepsilon_N^0 - b_{m,l,v}|^2 + \alpha S(\delta\varepsilon_N^0)$$

若取稳定性泛函 $S(\delta\varepsilon_N^0)$ 为 $(\delta\varepsilon_N^0)^+\delta\varepsilon_N^0$（$^+$ 表示共轭转置），则上述关于 $\delta\varepsilon_N^0$ 的最优化问题的解可转化为下列线性方程组的解：

$$(A^+A + \alpha I)\delta\varepsilon_N^0 = A^+B \tag{5.46}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a^T_{1,1,1} \\ a^T_{2,1,1} \\ \vdots \\ a^T_{M,1,1} \\ a^T_{1,2,1} \\ \vdots \\ a^T_{M,N_f,N_v} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{1,1,1} \\ b_{2,1,1} \\ \vdots \\ b_{M,1,1} \\ b_{1,2,1} \\ \vdots \\ b_{M,N_f,N_v} \end{bmatrix}$$

I 为 $N\times N$ 阶单位矩阵。

为了保证有很好的精度，参数 M、N_f、N_v 和 N 应满足下列条件：

$$MN_fN_v \geqslant N \tag{5.47}$$

下面讨论关于 $b_{m,l,v}$ 和 $a_{m,l,v}$ 的计算方法。

对式(5.40′)中的积分进行离散化得

$$\boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r}_m, \omega_l, \varepsilon_N^0) = \sum_{n=1}^{N_1} G(\boldsymbol{r}_m, \boldsymbol{r}'_n, \omega_l)\omega_l^2\mu_0\Big[\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^* \varphi_i(\boldsymbol{r}'_n) - \varepsilon_1^0\Big]\boldsymbol{E}_v^T(\boldsymbol{r}'_n\omega_l, \varepsilon_N^0)\Delta s_n, \quad \boldsymbol{r}_m \in D_1 \tag{5.48}$$

另一方面在 D_{obj} 内，仍有

$$\boldsymbol{E}_v^T(\boldsymbol{r}'_n, \omega_l, \varepsilon_N^0) = \boldsymbol{E}_v^i(\boldsymbol{r}'_n, \omega_l) + \sum_{n_1=1}^{N_1} G(\boldsymbol{r}'_n, \boldsymbol{r}'_{n_1}, \omega_l)\omega_l^2\mu_0\Big[\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^* \varphi_i(\boldsymbol{r}'_{n_1}) - \varepsilon_1^0\Big]\boldsymbol{E}_v^T(\boldsymbol{r}'_{n_1}, \omega_l, \varepsilon_N^0)\Delta s_{n_1}, \quad \boldsymbol{r}'_n \in D_{obj} \tag{5.49}$$

写成矩阵形式为

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_v^s(\omega_l, \varepsilon_N^0) = H(\omega_l, \varepsilon_N^0)\widetilde{\boldsymbol{E}}_v^T(\omega_l, \varepsilon_N^0) \tag{5.48′}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_v^T(\omega_l, \varepsilon_N^0) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_v^i(\omega_l) + \widetilde{H}(\omega_l, \varepsilon^0)\widetilde{\boldsymbol{E}}_v^T(\omega_l, \varepsilon_N^0) \tag{5.49′}$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_v^T(\omega_l, \varepsilon_N^0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_v^T(\boldsymbol{r}'_1, \omega_l, \varepsilon_N^0) \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_v^T(\boldsymbol{r}'_{N_1}, \omega_l, \varepsilon_N^0) \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_v^T(\omega_l) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_v^i(\boldsymbol{r}'_1, \omega_l) \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_v^i(\boldsymbol{r}'_{N_1}, \omega_l) \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_v^s(\omega_l, \varepsilon_N^0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r}'_1, \omega_l, \varepsilon_N^0) \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r}_N, \omega_l, \varepsilon_N^0) \end{bmatrix}$$

$$H(\omega_l, \varepsilon_N^0) = (h_{mn})_{M \times N_1}, \quad \widetilde{H}(\omega_l, \varepsilon_N^0) = (\widetilde{h}_{jk})_{N_1 \times N_1}$$

$$h_{mn} = \omega_l^2 \mu_0 G(\boldsymbol{r}_m, \boldsymbol{r}'_n, \omega_l)\left[\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \varphi_i(\boldsymbol{r}'_n) - \varepsilon_1^0\right]$$

$$\widetilde{h}_{jk} = \omega_l^2 \mu_0 G(\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{r}'_k, \omega_l)\left[\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \varphi_i(\boldsymbol{r}'_k) - \varepsilon_1^0\right]$$

则 D_{obj} 内的总电场和 D_1 内测量点上的散射场分别为

$$\widetilde{E}_v^T(\omega_l, \varepsilon_N^0) = [I - \widetilde{H}(\omega_l, \varepsilon_N^0)]^{-1} \widetilde{E}_v^i(\omega_l) \tag{5.50}$$

$$\widetilde{E}_v^s(\omega_l, \varepsilon_N^0) = H(\omega_l, \varepsilon_N^0)[I - \widetilde{H}(\omega_l, \varepsilon_N^0)]^{-1} \widetilde{E}_v^i(\omega_l) \tag{5.51}$$

对式(5.48′)和(5.49′)两边求关于 $\varepsilon_j (j = 1, 2, \cdots, N)$ 的偏导数得

$$\frac{\partial \widetilde{E}_v^s(\omega_l, \varepsilon_N^0)}{\partial \varepsilon_j} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_j} \widetilde{E}_v^T + H \frac{\partial \widetilde{E}_v^T}{\partial \varepsilon_j} \tag{5.52}$$

$$\frac{\partial \widetilde{E}_v^T(\omega_l, \varepsilon_N^0)}{\partial \varepsilon_j} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \varepsilon_j} \widetilde{E}_v^T + \widetilde{H} \frac{\partial \widetilde{E}_v^T}{\partial \varepsilon_j} \tag{5.53}$$

则

$$\frac{\partial \widetilde{E}_v^s}{\partial \varepsilon_j} = [I - \widetilde{H}]^{-1} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \varepsilon_j} \widetilde{E}_v^T$$

$$\frac{\partial \widetilde{E}_v^s}{\partial \varepsilon_j} = \left[\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_j} + H[I - \widetilde{H}]^{-1} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \varepsilon_j}\right] \widetilde{E}_v^T \tag{5.54}$$

由式(5.51)和(5.54)即可很方便地计算出 $b_{m,l,v}$ 和 $a_{m,l,v}^T$。

对选定的初始猜测向量 ε_N^0，电磁成象数值迭代过程为：

第一步：由式(5.51)计算出当入射频率为 ω_l、入射方向为 v 的所有测量点上的散射场 $\widetilde{E}_v^s(\omega_l, \varepsilon_N^0)$；

第二步：计算出测量点的散射场 $\boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r}_m, \omega_l, \varepsilon^*)$ 与计算出的散射场 $\widetilde{E}_v^s(\omega_l, \varepsilon_N^0)$ 之间的误差 $b_{m,l,v}$，并由式(5.51)式计算 $a_{m,l,v}^T$；

第三步：由式(5.46)计算得最佳摄动量 $\delta\varepsilon_N^0$；

第四步：由式(5.44)构成一组新的初始选定向量 ε_N^*；

第五步：由下列公式计算出测量点上的散射场 $\boldsymbol{E}_v^s(\boldsymbol{r}_m, \omega_l, \varepsilon^*)$ 与计算出的散射场 $\widetilde{E}_v^s(\boldsymbol{r}_m, \omega_l, \varepsilon_N^0)$ 之间的相对误差：

$$ER1 = \sqrt{\sum_{m,l,v} |b_{m,l,v}|^2 / \sum_{m,l,v} |E_v^s(r_m, \omega_l, \varepsilon^*)|^2}$$

若 $ER1$ 小于指定的精度要求，则迭代过程结束；否则，再次执行上述过程。

5.2.3　电磁成象的模拟计算

在没有实际测量数据的情况下，利用下列过程来证实上节介绍的电磁成象的数值方法的可行性。

首先，选定一个物体的复介电参数 $\varepsilon^*(r)$ 作为目标函数，利用式(5.51)计算出 N_v 个入射方向，N_f 个不同频率，在 M 个不同点上的散射场，并把它们作为模拟测量值 $E_v^s(r_m, \omega_l, \varepsilon^*)$。

然后，选取 ε_N^0 作为目标函数的初始猜测函数，利用上节介绍的电磁成象的一般迭代过程观察精确的复介电参数 $\varepsilon^*(r)$ 能否被重构?重构的误差用下列相对误差来衡量：

$$ER(\varepsilon^*, \varepsilon_N^0) = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |\varepsilon_N^0(r'_n) - \varepsilon^*(r'_n)|^2 / \sum_{n=1}^{N} |\varepsilon^*(r'_n)|^2}$$

其中 $\varepsilon_N^0(r'_n) = \Phi_N^T(r'_n)\varepsilon_N^0$。

模拟算例

考虑在生物医学中的微波成象问题。物体是由骨、肌肉和脂肪所构成，并且物体浸泡在水中。在 3GHz 入射频率下，骨、肌肉、脂肪和水四种物质的复介电参数分别为(8,1.2)、(46,12)、(2.5,1.3)和(76,14.4)。

在二维情况下，手臂模型的截面和结构见图5.8。对包围手臂的长方形区域分成 17×13 个单元，每个单元为 5 mm 边长的正方形。$\lambda = \frac{\omega}{c}$，$c$ 为光速，ω 为入射频率。

基函数$\{\varphi_i(r')\}$选取示性函数：

$$\varphi_i(r'_j)=\begin{cases}1, & r'_j\text{在第}i\text{个单元内}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}\quad (j=1,2,\cdots,N)$$

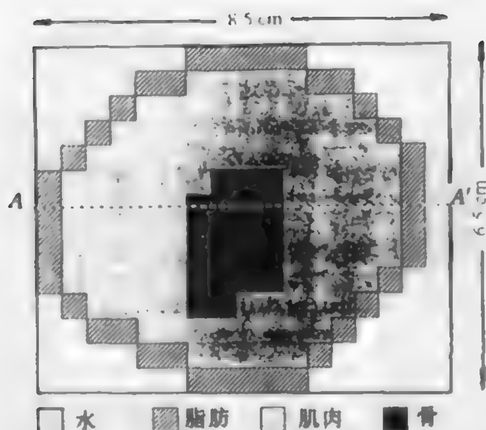


图 5.8 手臂模型的截面和结构

例 1 入射场为 TE 极化的平面波，并且在 16 个等分角方向入射，模拟散射场在以 5 λ 为半径的围绕着物体的 16 个等分角方向上测量得到数据。初始猜测选取为肌肉的复介电参数(46,12)。正则化参数取 0.000 3。关于复介电参数的实部和虚部的重构的计算结果见图 5.9(*a*)、图 5.9(*b*)。

例 2 当入射场为 TM 极化的平面波，并且 32 个等分角方向入射，模拟散射场在以 5 λ 为半径的围绕着物体的 32 个等分角方向上测量得到数据。初始猜测选取在中间一部分为骨的复介电参数(8,12)，其它选为肌肉。正则化参数取 0.000 3。关于复介电参数的实部和虚部的重构的计算结果见图 5.10(*a*)、图 5.10(*b*)。

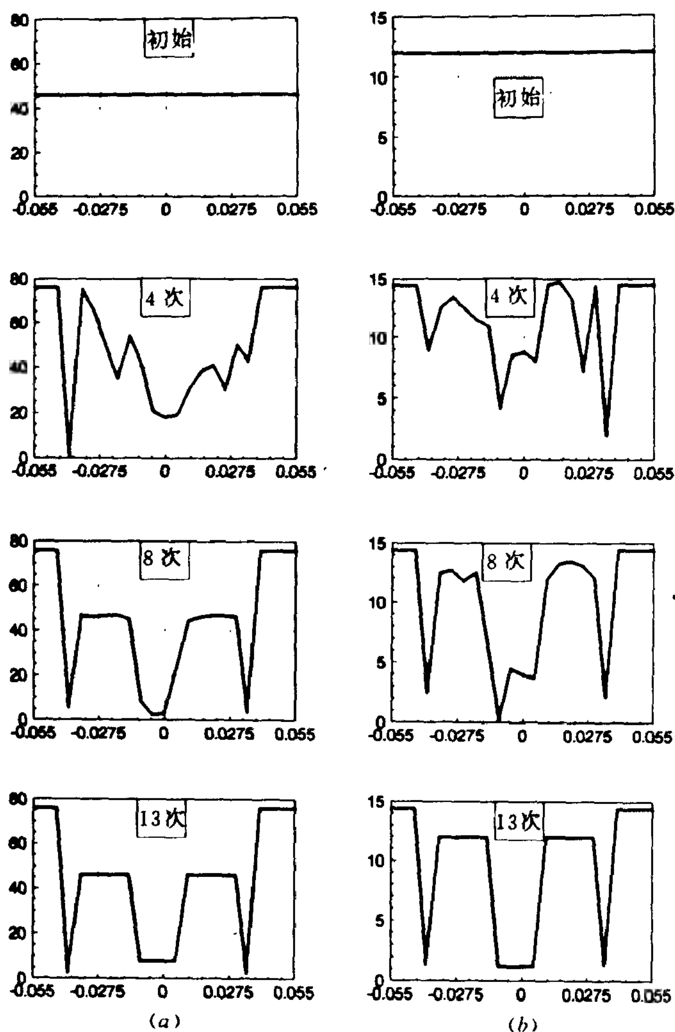
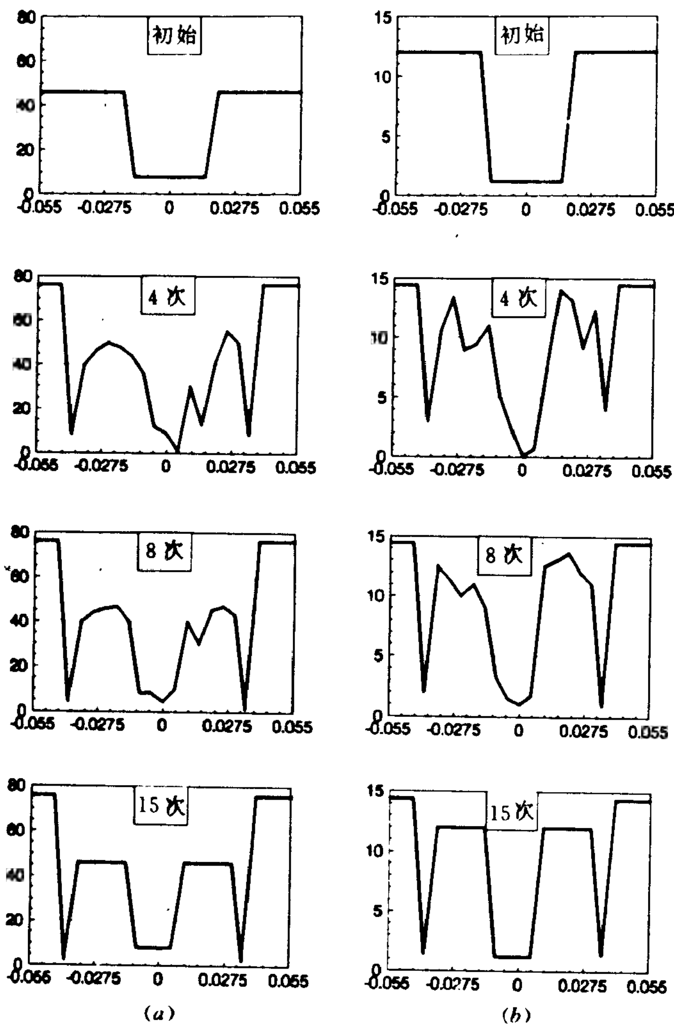


图　5.9

(a) 在从 A 在 A′ 截线上，复介电参数的实部重构的结果

(b) 在从 A 在 A′ 截线上，复介电参数的虚部重构的结果



(a)　　　　(b)

图　5.10

(a) 在从 A 在 A′ 截线上，复介电参数的实部重构的结果

(b) 在从 A 在 A′ 截线上，复介电参数的虚部重构的结果

5.3 无损探伤中物体的密度、体积模量、剪切模量的重构问题

为了防止材料在机械加载下突发的大灾变，早期利用无损估计发现材料的缺陷(裂缝等)，这在工程中变得越来越重要。物体的材料特性可由三个参数，即体积模量 $\lambda(\boldsymbol{x})$、剪切模量 $\mu(\boldsymbol{x})$ 和密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ 来确定。利用材料内的位置向量函数所满足的线性弹性波动方程和在物体表面可测量的弹性波的散射场来确定材料内部缺陷的方法在无损探伤方面变成一个重要部分。本节讨论这类问题的数值仿真。

5.3.1 问题的提出

假设三维需要诊断的物体为非均匀、各向同性的，物体内的质点位置向量函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \{u_1(\boldsymbol{x},t), u_2(\boldsymbol{x},t), u_3(\boldsymbol{x},t)\}$ $(\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3))$ 在区域 Ω 内满足下列弹性波动方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}[\lambda(\boldsymbol{x})\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)] + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\} - \rho(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0,\quad i=1,2,3,\quad x\in\boldsymbol{\Omega},\quad \theta>0 \tag{5.55}$$

所满足的初始条件为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \frac{\partial\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)}{\partial t} = \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega} \tag{5.56}$$

(这意味着在初始时刻，物体处于静止状态。)

所满足的边界条件为

$$u_i(\boldsymbol{x},t) = f_i(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_1,\quad i=1,2,\cdots \tag{5.57a}$$

这表示作用在边界 $\partial\Omega_1$ 的机械加载(由于压力和牵引力难以直接测量得到，所以这里采用位移加载)。

$$\lambda(\boldsymbol{x})\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_i)+\sum_{j=1}^{3}\mu(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_j)=0,$$
$$\boldsymbol{x}\in\partial\Omega_2,\quad i=1,2,3 \qquad (5.57b)$$

$\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega_2$ 的单位外法线向量，$\boldsymbol{x}_i$ 为 x_i 轴的单位向量。这表示该边界为自由边界部分。

$$u_i(\boldsymbol{x},t)=0,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_3,\quad i=1,2,3 \qquad (5.57c)$$

这表示该边界为固定边界部分。

这个 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 由非重叠的三个部分 $\partial\Omega_1$、$\partial\Omega_2$、$\partial\Omega_3$ 所构成。

无损探伤问题就是要从弹性波动方程(5.55)、已知的机械加载 $f_i(\boldsymbol{x},t)(i=1,2,3)$、自由边界条件、固定边界条件和下列附加条件：

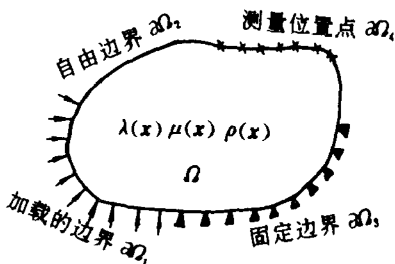


图 5.11 无损探伤问题示意图

$$u_i(\boldsymbol{x},t)=h_i(\boldsymbol{x},t),\quad i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_4\subset\partial\Omega_2 \qquad (5.58)$$

来确定弹性波动方程中的三个参数 $\lambda(\boldsymbol{x})$、$\mu(\boldsymbol{x})$、$\rho(\boldsymbol{x})$。

二维情况下的示意图见图 5.11。

5.3.2 解决无损探伤问题的 GPST 方法

首先，将时域内的问题转化到复频域内考虑，即对式(5.55)～(5.58)求 Laplace 变换可得

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[\lambda(\boldsymbol{x})\nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},s)]+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right]$$
$$-\rho(\boldsymbol{x})s^2v_i=0,\quad i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega \qquad (5.59)$$

$$v_i(\boldsymbol{x},s)=F_i(\boldsymbol{x},s),\quad i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \qquad (5.60a)$$

$$\lambda(\boldsymbol{x})\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_i+\sum_{j=1}^{3}\mu(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_j=0,$$

$$i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_2 \qquad (5.60b)$$

$$v_i(\boldsymbol{x},s)=0,\quad i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_3 \qquad (5.60c)$$

$$v_i(\boldsymbol{x},s)=H_i(\boldsymbol{x},s),\quad i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_4\subset\partial\Omega_2 \qquad (5.61)$$

其中 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},s)$、$F_i(\boldsymbol{x},s)$、$H_i(\boldsymbol{x},s)$ 分别为 $u(\boldsymbol{x},t)$、$f_i(\boldsymbol{x},t)$、$h_i(\boldsymbol{x},t)$ 的 Laplace 变换。

于是三参数 $\lambda(\boldsymbol{x})$、$\mu(\boldsymbol{x})$、$\rho(\boldsymbol{x})$ 由方程式(5.59)和边界条件(5.60),(5.61)确定。

令迭代过程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_{n-1}(\boldsymbol{x},s)=\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)+\delta\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)\\ \lambda_{n+1}(\boldsymbol{x})=\lambda_n(\boldsymbol{x})+\delta\lambda_n(\boldsymbol{x})\\ \mu_{n+1}(\boldsymbol{x})=\mu_n(\boldsymbol{x})+\delta\mu_n(\boldsymbol{x})\\ \rho_{n-1}(\boldsymbol{x})=\rho_n(\boldsymbol{x})+\delta\rho_n(\boldsymbol{x})\end{cases}\qquad (n=0,1,2,\cdots) \qquad (5.62)$$

其中 $\lambda_0(\boldsymbol{x})$、$\mu_0(\boldsymbol{x})$、$\rho_0(\boldsymbol{x})$ 为未知参数的初始猜测函数，微小扰动量 $\delta\lambda_n(\boldsymbol{x})$、$\delta\mu_n(\boldsymbol{x})$、$\delta\rho_n(\boldsymbol{x})$ 满足下列不等式：

$$\begin{cases}|\delta\lambda_n(\boldsymbol{x})|\ll|\lambda_n(\boldsymbol{x})|\\ |\delta\mu_n(\boldsymbol{x})|\ll|\mu_n(\boldsymbol{x})|\\ |\delta\rho_n(\boldsymbol{x})|\ll|\rho_n(\boldsymbol{x})|\end{cases} \qquad (5.63)$$

$\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)$ 为对应于一组参数($\lambda_0(\boldsymbol{x})$、$\mu_0(\boldsymbol{x})$、$\rho_0(\boldsymbol{x})$)弹性波动方程式(5.59)和边界条件(5.60$a$) ～ (5.60$c$)的解，即 $\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)$ 为下列边值问题的解：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[\lambda_n(\boldsymbol{x})\nabla\cdot\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)]+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_n(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial v_{in}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_{jn}}{\partial x_i}\right)\right]$$

$$-\rho_n(\boldsymbol{x})s^2v_{in}=0,\quad i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega_1 \qquad (5.64a)$$

$$v_{in}(\boldsymbol{x},s)=F_i(\boldsymbol{x},s)\quad i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \qquad (5.64b)$$

$$\lambda_n(\boldsymbol{x})\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_{jn}}{\partial x_j}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_i+\sum_{j=1}^{3}\mu_n(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial v_{in}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_{jn}}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_j=0,$$

$$i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_2 \quad (5.64c)$$

$$v_{in}(\boldsymbol{x},s)=0,\quad i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_3 \quad (5.64d)$$

将 $\boldsymbol{v}_{n-1}(\boldsymbol{x},s)$ 和 $\{\lambda_{n-1}(\boldsymbol{x})、\mu_{n-1}(\boldsymbol{x})、\rho_{n-1}(\boldsymbol{x})\}$ 代入上述边值问题，利用 $\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)$ 为上述边值问题的解，并忽略 $\delta\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)\delta\lambda_n(\boldsymbol{x})$、$\delta\mu_n(\boldsymbol{x})\delta v_n$ 等关于 δ 的高阶项，可以得到 $\delta\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)$ 与 $\delta\lambda_n(\boldsymbol{x})$、$\delta\mu_n(\boldsymbol{x})$、$\delta\rho_n(\boldsymbol{x})$ 的边值问题

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[\lambda_n(\boldsymbol{x})\nabla\cdot\delta\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)]+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_n(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial\,\delta v_{in}}{\partial x_j}+\frac{\partial\,\delta v_{jn}}{\partial x_i}\right)\right]$$

$$-\rho_n(\boldsymbol{x})s^2\delta v_{in}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_i}[\delta\lambda_n(\boldsymbol{x})\nabla\cdot\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)]-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\delta\mu_n(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial v_{in}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_{jn}}{\partial x_i}\right)\right]$$

$$+\delta\rho_n(\boldsymbol{x})s^2v_{in},\quad i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega \quad (5.65a)$$

$$\delta v_{in}(\boldsymbol{x},s)=0,\quad i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_1 \quad (5.65b)$$

$$\lambda_n(\boldsymbol{x})\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\,\delta v_{jn}}{\partial x_j}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_i+\sum_{j=1}^{3}\mu_n(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial\,\delta v_{in}}{\partial x_j}+\frac{\partial\,\delta v_{jn}}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_j$$

$$=-\delta\lambda_n(\boldsymbol{x})\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_{jn}}{\partial x_j}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_i+\sum_{j=1}^{3}\delta\mu_n(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial v_{in}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_{jn}}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_j,$$

$$i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_2 \quad (5.65c)$$

$$\delta v_{in}(\boldsymbol{x},s)=0,\quad i=1,2,3,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_3 \quad (5.65d)$$

假设 $G_{in}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',s)(i=1,2,3)$ 为式(5.65a)～(5.65d)问题的 Green 函数，则

$$\delta v_{in}(\boldsymbol{x},s)=-\iiint_{\Omega}G_{in}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',s)\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}[\lambda_n(\boldsymbol{x}')\nabla'\cdot\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x}',s)]\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\delta\mu_n(\boldsymbol{x}')\left(\frac{\partial v_{in}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_{jn}}{\partial x_i}\right)\right]$$

$$\left.-\delta\rho_n(\boldsymbol{x}')s^2v_{in}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}',\quad i=1,2,3 \quad (5.66)$$

由附加条件，并令 $\delta \boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)=\boldsymbol{v}_{n-1}(\boldsymbol{x},s)-\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)\approx H(\boldsymbol{x},s)-\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x}\in\partial\Omega_t$，则

$$
\begin{aligned}
& v_{in}(\boldsymbol{x},s)-H_i(\boldsymbol{x},s) \\
= & -\iiint_{\Omega} G_{in}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',s)\big|_{x\in\partial\Omega_t}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\delta\lambda_n(\boldsymbol{x}')\nabla'\cdot\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},s)\right]\right. \\
& \left.+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\delta\mu_n(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial v_{in}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_{jn}}{\partial x_i}\right)\right]-\delta\rho_n(\boldsymbol{x}')s^2 v_{in}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}',
\end{aligned}
$$

$$
i=1,2,3 \qquad (5.67)
$$

上述公式是关于 $\{\delta\lambda_n(\boldsymbol{x}),\delta\mu_n(\boldsymbol{x}),\delta\rho_n(\boldsymbol{x})\}$ 的第一类 Fredholm 积分方程。

GPST 解决重构问题的基本迭代过程：

(1) 利用数值积分计算 $f(\boldsymbol{x},t)$、$h(\boldsymbol{x},t)$ 的 Laplace 变换象函数 $F(\boldsymbol{x},s)$、$H(\boldsymbol{x},s)$ 在 $s=s_m(m=1,2,\cdots,M)$ 处的值。

(2) 对选定的一组 $\{\lambda_n(\boldsymbol{x}),\mu_n(\boldsymbol{x}),\rho_n(\boldsymbol{x})\}$，利用数值方法，计算弹性波动方程式(5.64)，(5.65) 和 Green 函数 $G_{in}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',s)$ 在 $s=s_m(m=1,2,\cdots,M)$ 处的数值解。

(3) 对第一类 Fredholm 积分方程式(5.67) 进行离散化，并采用正则化方法求解，得到扰动量 $\delta\lambda_{n-1}(\boldsymbol{x})$、$\delta\mu_{n-1}(\boldsymbol{x})$、$\delta\rho_{n-1}(\boldsymbol{x})$。

(4) 由式(5.62) 构成下一次的初始向量。

每次循环之中，需要计算 m 次弹性波动方程和 Green 函数的数值解，以及一次第一类 Fredholm 积分方程的数值解。

5.3.3 数值模拟

数值仿真过程如下：

(1) 首先，选取一组参数 $\{\lambda^*(\boldsymbol{x})$、$\mu^*(\boldsymbol{x})$、$\rho^*(\boldsymbol{x})\}$ 作为未知参数的精确值和加载函数 $f_i(\boldsymbol{x},t)(i=1,2,3)$，并数值计算它的 Laplace 变换 $F(\boldsymbol{x},s)$ 在离散点 $s_m(m=1,2,\cdots,M)$ 上的值。

(2) 利用有限差分法计算弹性波动方程初边值问题(5.55)～

(5.57) 在复频域内的数值解及在 Ω_4 上的附加条件 $H_i(\boldsymbol{x},s)(i=1,2,3)$ 的数值，并把它视为模拟测量值，作为已知的附加条件。

(3) 选取一组初始猜测量 $\{\lambda_0(\boldsymbol{x}),\mu_0(\boldsymbol{x}),\rho_0(\boldsymbol{x})\}$ 作为已知量，利用上述构成的 GPST 迭代算法，一次一次地得到新的一组已知量 $\{\lambda_N(\boldsymbol{x}),\mu_N(\boldsymbol{x}),\rho_N(\boldsymbol{x})\}$，利用

$$\|\lambda_N(\boldsymbol{x})-\lambda^*(\boldsymbol{x})\|+\|\mu_N(\boldsymbol{x})-\mu^*(\boldsymbol{x})\|+\|\rho_N(\boldsymbol{x})-\rho^*(\boldsymbol{x})\|$$

作为衡量标准，判断 GPST 每次的计算效果和收敛速度。

我们选取一个很厚的 L 形钢体棒作为模拟算例。这个钢体在一个角处由于微空产生缺陷，并假设这些微空缺陷并不改变钢体的密度函数，即 $\rho(\boldsymbol{x})\equiv 1$。机械加载应用于 L 形钢体的一个边处，另一个边作为测量数据处，由于 L 形钢体很厚，我们可以把该问题之视为二维的情况，并且密度函数保持不变。因此这样的算例为关于 $\lambda^*(\boldsymbol{x})$、$\mu^*(\boldsymbol{x})$ 二维二参数的重构问题。该问题的示意图见图 5.12。

图 5.12　L 形钢体二维重构示意图

利用数值仿真过程重构结构见图 5.13、图 5.14。

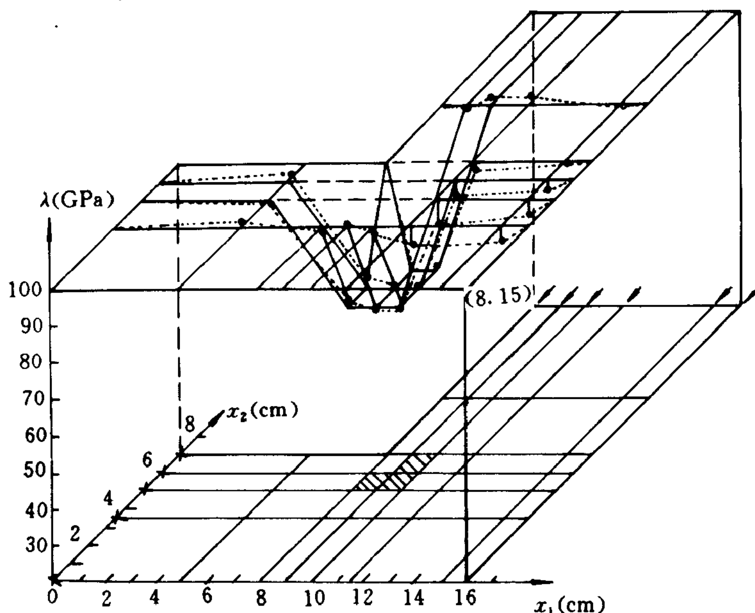


图 5.13 $\lambda^*(x)$ 重构结果

虽然计算的网格分点数很少，但重构的相对误差

$$\max_{x\in\Omega}\frac{\|\lambda^*-\lambda_N\|}{\|\lambda^*\|}=0.075$$

$$\max_{x\in\Omega}\frac{\|\mu^*-\mu_N\|}{\|\mu^*\|}=0.147$$

是比较小。重构的灵敏度(定义为重构的数值误差与初始猜测的误差)为

$$\frac{\max\|\lambda^*-\lambda_N\|}{\max\|\lambda^*-\lambda_0\|}=0.25$$

$$\frac{\max \| \mu^* - \mu_N \|}{\max \| \mu^* - \mu_0 \|} = 0.275$$

这个结果也是比较满意的。一般地，如果网格适当加密，则应用 GPST 方法计算的结果就会更好。

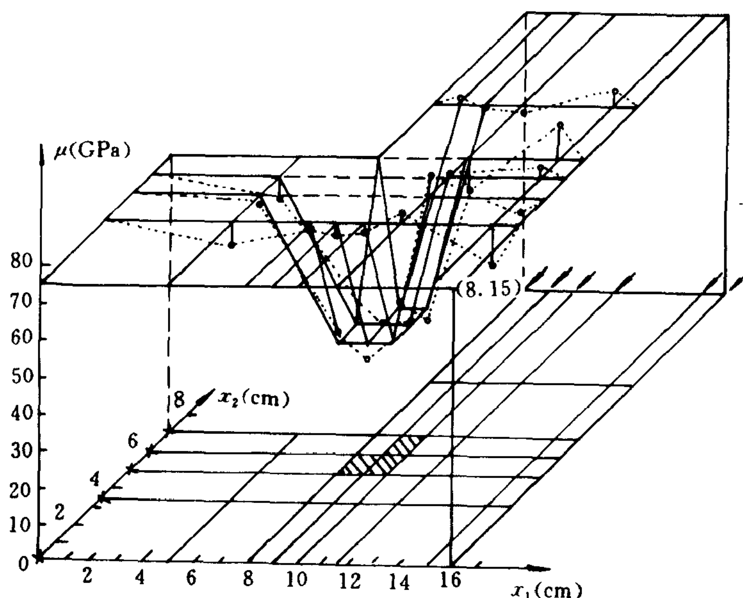


图 5.14 $\mu^*(x)$ 重构结果

5.4 跨音速机翼的反设计方法

5.4.1 问题的提出

我们知道，在航空工业中，飞机的翼型和机翼设计是一项很重要的工作。机翼设计的好坏决定了飞机的各种飞行性能和气动效率。在现代民用飞机制造业中，制造厂家更加重视经济性和安全

性。飞机耗油和航程与飞机巡航的气动效率直接相关

$$\frac{\text{耗油量}}{\text{飞行距离}} \sim \frac{W}{M}\frac{D}{L} = \frac{W}{ML/D}$$

其中 W 为飞机重量，M 为飞行马赫数，D 为飞机阻力，L 为气动升力。

由上式可知，耗油量与气动效率 ML/D 成反比。因此，节油就意味着使气动效率尽可能地高。在增加飞机气动效率的要求下，跨音速机翼的反设计优化方法的研究使得未来飞机设计出现了一些新的设计思想，减少飞机阻力是增加飞机气动效率的关键。飞机阻力的主要来源是粘性阻力和激波阻力。减少粘性阻力的最好方法是设计层流机翼，使机翼表面保持较长的层流段；激波阻力可以通过设计无激波超临界机翼来减少。

从空气动力学的知识可知，在给定的飞行马赫数 M_∞ 下，机翼的外形（机翼剖面示意图见图 5.15）决定了在机翼表面的压力分布函数，并且也决定了粘性阻力的大小以及激波阻力是否存在。

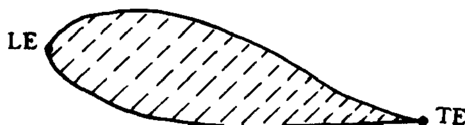


图 5.15 机翼剖面示意图
LE、TE 分别表示为前缘和后缘点

在三维空间中，扰动全速势函数 $\overline{\Phi}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ 满足下列非线性椭圆方程：

$$\Delta\overline{\Phi} - M_\infty^2 \frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial \overline{x}^2} = k\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{x}}\right)^2\right] + \overline{H} \qquad (5.68)$$

其中 $k=(\gamma+1)M_\infty^2$，γ 为比热比，$\overline{H}$ 为 $\overline{\Phi}$ 的高阶无穷小量，Δ 为 Laplace 算子。

势函数 $\bar{\Phi}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 在机翼表面上所满足的边界条件为

$$\bar{\Phi}_{\bar{z}}(\bar{x},\bar{y},\pm 0) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{f}_{\pm}(\bar{x},\bar{y}) + \bar{Q} \tag{5.69}$$

其中 $\bar{Q}$ 为 $\bar{\Phi}$ 的高阶无穷小量。

$\bar{z} = \bar{f}_{+}(\bar{x},\bar{y})$ 和 $\bar{z} = \bar{f}_{-}(\bar{x},\bar{y})$ 分别表示机翼的上下两个曲面。

在机翼表面上的压力分布 $C_{p_{\pm}}(\bar{x},\bar{y})$ 与势函数 $\bar{\Phi}$ 之间的关系为

$$C_{p_{\pm}}(\bar{x},\bar{y}) = -2\bar{\Phi}_{\bar{x}}(\bar{x},\bar{y},\pm 0) + \bar{S} \tag{5.70}$$

其中 $\bar{S}$ 为 $\bar{\Phi}$ 的高阶无穷小量。

机翼设计的正问题就是在给定的翼面函数，即 $\bar{z} = \bar{f}_{+}(\bar{x},\bar{y})$ 和 $\bar{z} = \bar{f}_{-}(\bar{x},\bar{y})$（$(\bar{x},\bar{y}) \in D$ 区域），根据非线性椭圆方程式(5.68)和边界条件(5.69)就可确定该问题的全速势函数 $\bar{\Phi}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，并且也确定了翼面上的压力分布 $C_{p_{\pm}}(\bar{x},\bar{y})$。机翼设计的反问题就是在给定的目标压力分布函数 $C_{p_{\pm}}(\bar{x},\bar{y})$，并根据方程式(5.68)和边界条件(5.70)来确定翼面 $\bar{z} = \bar{f}_{\pm}(\bar{x},\bar{y})$。

三维跨音速机翼的最新反设计方法是由 Takanashi 在 1984 年提出的残数修正型方法。该方法将独立发展的反设计部分与现有的正设计方法耦合地进行正反迭代设计。由于该设计在正反设计过程中是相对独立进行的，则可以方便地采用当前正设计方法中的最先进技术，包括 Navier－Stokes 方程的数值计算方法。因此，残数修正型方法是一种具有很大发展潜力的方法。目前，我国在跨音速机翼反设计方法方面的研究也广泛采用了残数修正型方法。

5.4.2　残数修正型方法

首先采用下列线性变换将方程式(5.68)由物理坐标系变换到设计坐标系(x,y,z)：

$$x = \bar{x},\quad y = \beta\bar{y},\quad z = \beta\bar{z},\quad \beta = \sqrt{1 - M_{\infty}^2} \tag{5.71}$$

$$\Phi(x,y,z) = \frac{k}{\beta^2}\overline{\Phi}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$$

则式(5.68)、(5.69)、(5.70)在(x,y,z)坐标系下分别为

$$\Delta\Phi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\Phi_x^2\right) + H \tag{5.72}$$

$$\Phi_z(x,y,\pm 0) = f'_\pm(x,y) + Q \tag{5.73}$$

$$C_{p_\pm}(x,\frac{y}{\beta}) = -2\frac{\beta^2}{k}\Phi_x(x,y,\pm 0) + S \tag{5.74}$$

其中

$$f'_\pm(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f_\pm(x,y) = \frac{k}{\beta^3}\overline{f}_\pm(\overline{x},\overline{y}) \tag{5.75}$$

H、Q、S分别为由$\overline{H}$、$\overline{Q}$、$\overline{S}$转换坐标系得到的高阶无穷小量。

机翼设计在反问题转化为在给定的压力分布函数$C_{p_\pm}(x,\frac{y}{\beta})$下，设计出满足式(5.72)和(5.74)的翼面函数$z = f_\pm(x,y)$。

对给定的一个初始翼面函数$z = f_\pm(x,y)$，则由式(5.72)、(5.73)便可唯一地确定全速势函数$\Phi(x,y,z)$和相对应的压力分布函数$C_{p_\pm}(x,\frac{y}{\beta})$。若给翼面增加一个微小扰动$\delta f_\pm(x,y)$，则相应的全速势函数$\Phi$也将会产生一个微小扰动的全速势函数$\delta\Phi$和压力分布函数$\delta C_{p_\pm}$，并且$\Phi + \delta\Phi$满足下列控制方程组：

$$\Delta(\Phi + \delta\Phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_x + \delta\Phi_x)^2\right] + H \tag{5.76}$$

$$(\Phi_z + \delta\Phi_z)|_{z=\pm 0} = f'_\pm(x,y) + \delta f'_\pm(x,y) + Q \tag{5.77}$$

$$C_{p_\pm}(x,\frac{y}{\beta}) + \delta C_{p_\pm}(x,\frac{y}{\beta}) = -2\frac{\beta^2}{k}[\Phi_x(x,y,\pm 0) + \delta\Phi_x(x,y,\pm 0)] + S \tag{5.78}$$

根据Φ所满足的方程和边界条件，并代入式(5.76)、(5.77)和(5.78)可化简得$\delta\Phi$所满足的控制方程组

$$\Delta\delta\Phi = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_x + \delta\Phi_x)^2 - \delta\Phi_x^2\right] \tag{5.79}$$

$$\delta\Phi_x(x,y,\pm 0) = \delta f'_\pm(x,y) \tag{5.80}$$

$$\delta C_{p_\pm}\left(x,\frac{y}{\beta}\right) = -2\frac{\beta^2}{k}\delta\Phi_x(x,y,\pm 0) \tag{5.81}$$

利用Green函数方法，将式(5.79)转化成下列微分积分方程：

$$\delta\Phi = -\frac{1}{4\pi}\iint_{S_{wv}}\{\Psi(x,y,z;\xi,\eta,0)[\delta\Phi_\xi(\xi,\eta,+0) - \delta\Phi_\xi(\xi,\eta-0)]$$

$$-\Psi_\xi(x,y,z;\xi,\eta,0)[\delta\Phi(\xi,\eta,+0) - \delta\Phi(\xi,\eta,-0)]\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\int_{\infty}^{\infty}\int\Psi_\xi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\chi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{5.82}$$

其中

$$\chi(x,y,z) = \frac{1}{2}[(\Phi_x + \delta\Phi_x)^2 - \Phi_x^2] \tag{5.83}$$

$$\Psi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{5.84}$$

S_{wv}表示由机翼的上下曲面和尾流面所构成的曲面。

式(5.82)中的三重积分按照Oswatitch主值积分来定义

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}\int(\quad)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = \lim_{\epsilon\to 0}\iint_{\infty}^{\infty}\left[\int_{\infty}^{x-\epsilon}(\quad)\mathrm{d}\xi + \int_{x+\epsilon}^{\infty}(\quad)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{5.85}$$

对式(5.82)两边求关于x的偏导数，并对在$z=\pm 0$处的值相加可得

$$\delta u_t(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{S_w}\Psi_x(x,y,0;\xi,\eta,0)\delta w_t(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \chi_t(x,y)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\Psi_{\xi x}(x,y,0;\xi,\eta,\zeta)[\chi(\xi,\eta,\zeta)$$

$$+\chi(\xi,\eta,-\zeta)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{5.86}$$

其中

$$\chi_s(x,y)=\chi(x,y,+0)+\chi(x,y,-0) \tag{5.87}$$

$$\delta u_s(x,y)=\delta\Phi_x(x,y,+0)+\delta\Phi_x(x,y,-0) \tag{5.88}$$

$$\delta w_s(x,y)=\delta\Phi_z(x,y,+0)-\delta\Phi_z(x,y,-0) \tag{5.89}$$

S_w 表示翼面所构成的闭合曲面。

类似地对式(5.82)两边求关于 z 的偏导数，并对在 $z=\pm 0$ 处的值相加可得

$$\delta w_a(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_{S_w}\frac{\delta u_a(\xi,\eta)}{(y-\eta)^2}\left[1+\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\Psi_{\zeta_z}(x,y,0;\xi,\eta,\zeta)[\chi(\xi,\eta,\zeta)$$
$$-\chi(\xi,\eta,-\zeta)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{5.90}$$

其中

$$\delta u_a(x,y)=\delta\Phi_x(x,y,+0)-\delta\Phi_x(x,y,-0) \tag{5.91}$$

$$\delta w_a(x,y)=\delta\Phi_z(x,y,+0)+\delta\Phi_z(x,y,-0) \tag{5.92}$$

为了计算式(5.86)和(5.90)中的三重积分需要已知 $\chi(x,y,z)$ 在整个流场空间中的变化特性。为此，引入类似与 Nφrstrud 使用过的衰减函数来逼近 $\Phi_x(x,y,z)$：

$$\Phi_x(x,y,z)=\Phi_x(x,y,\pm 0)\mathrm{e}^{\mp R_\pm(x,y)z} \tag{5.93}$$

其中

$$R_\pm(x,y)=\left|\frac{f''_\pm(x,y)}{\Phi_x(x,y,\pm 0)}\right|,\quad f''_\pm(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_\pm(x,y) \tag{5.94}$$

由于 $\Phi_z(x,y,\pm 0)=f'_\pm(x,y)$ 近似成立，则不难验证在翼面上由式(5.93)构成的近似函数 $\Phi_x(x,y,z)$ 满足 $\Phi_{xz}=\Phi_{zx}$。

因此，可以假设

$$\delta\Phi_x(x,y,z)=\delta\Phi_x(x,y,\pm 0)\mathrm{e}^{\mp R_\pm(x,y)z} \tag{5.95}$$

则 $\chi(x,y,z)$ 的表达式可化简为

$$\chi(x,y,z) = \chi(x,y,\pm 0)e^{\mp 2R_{\pm}(x,y)z} \tag{5.96}$$

将式(5.96)代入式(5.86)和(5.90)，并忽略机翼顺流点和逆流点对扰动势函数的微小影响，可得

$$\begin{aligned}\delta u_s(x,y) = & -\frac{1}{2\pi}\iint_{S_w}\Psi_x(x,y,0;\xi,\eta,0)\delta w_s(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \chi_s(x,y) \\ & + \frac{1}{2\pi}\iint_{S_w}[I_s(x,y;\xi,\eta,+0)\chi(\xi,\eta,+0) \\ & + I_s(x,y;\xi,\eta,-0)\chi(\xi,\eta,-0)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{5.97}$$

$$\begin{aligned}\delta w_a(x,y) = & \frac{1}{2\pi}\iint_{S_w}\frac{\delta u_a(\xi,\eta)}{(y-\eta)^2}\left[1+\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ & + \frac{1}{2\pi}\iint_{S_w}[I_a(x,y;\xi,\eta,+0)\chi(\xi,\eta,+0) \\ & - I_a(x,y;\xi,\eta,-0)\chi(\xi,\eta,-0)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{5.98}$$

其中

$$I_s(x,y;\xi,\eta,\pm 0) = \int_0^{\mp\infty}\Psi_{\xi x}(x,y,0;\xi,\eta,\zeta)e^{\quad 2R_{\pm}(\xi,\eta)\zeta}\mathrm{d}\zeta \tag{5.99}$$

$$I_a(x,y;\xi,\eta,\pm 0) = \int_0^{\mp\infty}\Psi_{\xi z}(x,y,0;\xi,\eta,\zeta)e^{\quad 2R_{\pm}(\xi,\eta)\zeta}\mathrm{d}\zeta \tag{5.100}$$

根据式(5.74)、(5.88)和(5.91)可知

$$\delta u_s(x,y) = -\frac{k}{2\beta^2}\left[\delta C_{p_+}(x,\frac{y}{\beta}) + \delta C_{p}\ (x,\frac{y}{\beta})\right] \tag{5.88'}$$

$$\delta u_a(x,y) = -\frac{k}{2\beta^2}\left[\delta C_{p_-}(x,\frac{y}{\beta}) - \delta C_{p}\ (x,\frac{y}{\beta})\right] \tag{5.91'}$$

$$\begin{aligned}\chi(x,y,\pm 0) = \frac{1}{2}\Bigg[&\left(\Phi_x(x,y,0) - \frac{k}{2\beta^2}\delta C_{p_\pm}(x,\frac{y}{\beta})\right)^2 \\ & - \Phi_x^2(x,y,0)\Bigg]\end{aligned} \tag{5.101}$$

$$\delta w_s(x,y) = \delta f'_-(x,y) - \delta f'\ \ (x,y) \tag{5.89'}$$

$$\delta w_a(x,y) = \delta f'_-(x,y) + \delta f'_.\ (x,y) \tag{5.92'}$$

从式(5.88′)、(5.91′)、(5.98)和(5.101)，不难知：$\delta w_a(x,y)$ 直接可由关于 $f_\pm(x,y)$、$\delta C_{p_\pm}(x,\frac{y}{\beta})$ 的显式表达式求得。

从式(5.89′)、(5.92′)、(5.98)和(5.101)，不难知：$\delta w_s(x,y)$ 可由下列第一类 Fredholm 积分方程确定：

$$\iint_{S_w}\Psi_x(x,y,0;\xi,\eta,0)\delta w_s(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = F(x,y;\delta C_{p_\pm},\Phi,f_\pm) \tag{5.97'}$$

其中

$$F = 2\pi\Big[-\delta u_s(x,y)+\chi_s(x,y)+\frac{1}{2\pi}\iint_{S_u}[I_s(x,y,\xi,\eta,+0) \times\chi(\xi,\eta,+0)+I_s(x,y;\xi,\eta,-0)\chi(\xi,\eta,-0)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\Big]$$

一旦 $\delta w_a(x,y)$、$\delta w_s(x,y)$ 被唯一确定，则由式(5.89′)、(5.92′)可知

$$\delta f'_\pm(x,y) = \frac{1}{2}[\delta w_a(x,y)\pm\delta w_s(x,y)] \tag{5.102}$$

$$\delta f_\pm(x,y) = \delta f_\pm(x_{LE}(y),y)+\int_{x_{LE}(y)}^{x}\frac{1}{2}[\delta w_a(x,y) \pm\delta w_s(x,y)]\mathrm{d}x,\quad x\leqslant x_{TE}(y) \tag{5.103}$$

其中 $x_{TE}(y)$、$x_{LE}(y)$ 表示机翼在 y 的截面上的前缘边界点和后缘边界点(见图 5.15)。

从式(5.103)还不能唯一地确定 $\delta f_\pm(x,y)$。为了唯一地确定它，还必须附加两个条件。

第一个条件为：

$$\delta f_\pm(x_{LE}(y),y) = 0\quad(对一切\ y) \tag{5.104}$$

这一条件意味着修正的机翼在前缘边界点始终保持不变。

第二个条件为：

$$\int_{x_{LE}(y)}^{x_{TE}(y)}\delta w_s(x,y)\mathrm{d}x = 0\quad(对一切\ y) \tag{5.105}$$

这一条件意味着修正的机翼在 y 的剖面内的面积始终保持不变。

对给定翼型的目标压力分布函数 $C_{T_{\pm}}(x,y)$ 残数修正型方法的一般迭代步骤：

第一步：给定初始翼型 $z=f_{\pm}(x,y)$，利用数值方法计算由式(5.72)和(5.73)构成的非线性椭圆方程问题；

第二步：由式(5.74)计算得到的初始翼型的压力分布 $C_{p_{\pm}}(x,y)$，并计算它与目标压力分布函数之差 $\delta C_{p_{\pm}}=C_{T_{\pm}}-C_{p_{\pm}}$；

第三步：对式(5.90)右边利用数值积分便可得 $\delta w_a(x,y)$；

第四步：采用正则化方法和数值方法求解积分方程式(5.97)，得到 $\delta w_t(x,y)$；

第五步：利用式(5.103)计算得到翼型的修正量 $\delta f_{\pm}(x,y)$；

第六步：令 $\delta f_{\pm}(x,y)+f_{\pm}(x,y)\Rightarrow f_{\pm}(x,y)$ 得到新的翼型，并再次执行上述过程，直到 $\|C_{T_{\pm}}-C_{p_{\pm}}\|<\varepsilon$（$\varepsilon$ 为指定的精度）为止。

由此可见，本节所介绍的残数修正型方法与第三章介绍的 GPST 方法是完全类似的。

在具体做数值计算过程中，要谨慎处理好式(5.90)和(5.97)中出现的奇异性积分，并对新的翼型曲面作光顺处理以便保持光滑的曲率分布。例如：将第六步改为如下的光滑-松驰过程

$$\begin{aligned}f_{\pm}(x_i,y_j)&+\mu[\delta f_{\pm}(x_i,y_j)+0.25(\delta f_{\pm}(x_i,y_{j+1})\\&+\delta f_{\pm}(x_i,y_{j-1})+\delta f_{\pm}(x_{i+1},y_j)\\&+\delta f_{\pm}(x_{i-1},y_j)]\Rightarrow f_{\pm}(x_i,y_j)\end{aligned}\tag{5.106}$$

其中 μ 为松弛参数，取值范围为 $0\leqslant\mu\leqslant0.5$。

5.4.3 设计实例

为了验证残数修正型方法的可行性，首先选定一个机翼 $f_{\pm}^{*}$ 作为目标函数，利用正设计方法计算得到在该机翼下的压力分布函数 $C_{p_{\pm}}$，并把它作为反设计问题的目标压力分布函数 $C_{p_{\pm}}^{*}$。然后，选定一个机翼 $f_{\pm}(\neq f_{p_{\pm}}^{*})$ 视为初始机翼，利用残数修正型方法的一

般迭代步骤来观察能否重构 $C_{p_\pm}^*$。

选取目标压力分布为一个已知超临界机翼 $F1$ 在 $M_\infty = 0.78$，仰角为 $\alpha = 0.45°$ 时的压力分布。并将 $F1$ 机翼各剖面上表面各点的坐标增加该处厚度的 20% 作为初始机翼。经过 9 次迭代设计机翼上的压力分布与目标的压力分布相重合。图 5.16 给出了各剖面处目标压力分布、初始压力分布和设计机翼上的压力分布。由图 5.16 可见：设计机翼上的压力分布与目标压力分布重合的很好。图 5.17 给出了初始机翼、目标机翼（$F1$ 机翼）及设计机翼的三个剖面的几何型面。由图 5.17 可见：设计机翼与目标机翼的几何型面重合的也很一致。

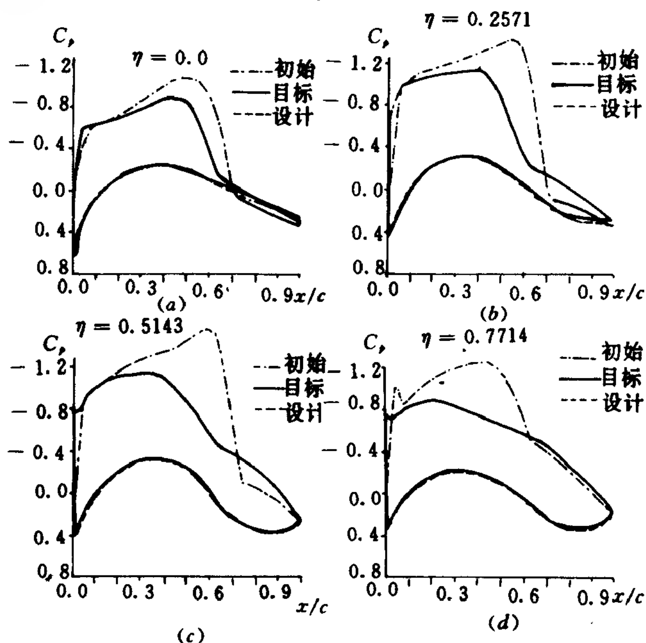


图 5.16　$F1$ 机翼各剖面处压力分布的比较

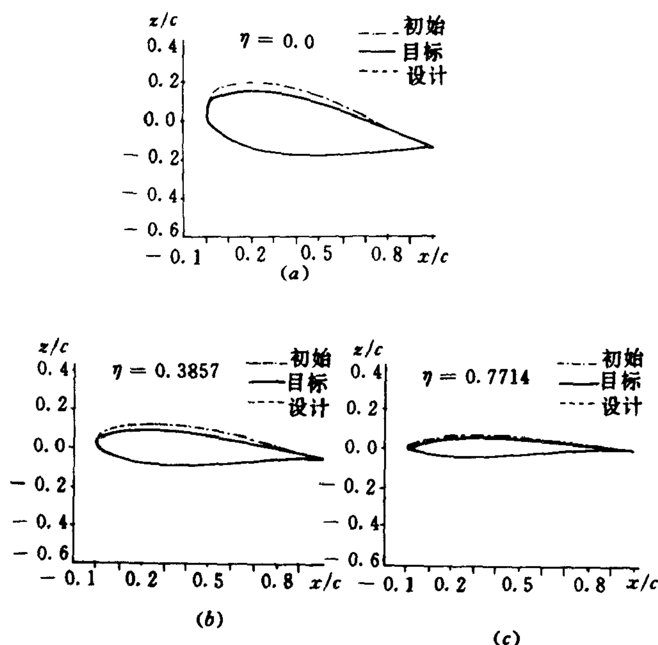


图 5.17 F1 机翼各剖面几何型面的比较

5.5 分布式参数系统中的一类逆问题

5.5.1 问题的提出

众所周知，分布式参数系统的模型建立对精确描述和有效控制许多物理和工程应用中的过程起着关键的作用。因此，分布式参数系统的识别问题受到了广泛重视。虽然，对分布式参数系统的识别问题做了大量的研究，但是它们主要研究的是从输入和输出数

据来估计未知参数。然而，由于与地球物理和环境问题的分析和控制有关，作用在分布式参数系统上的外界力的识别问题变得越来越重要。例如，要控制空气或水污染时，经常需要实时利用在几个观察站取得的测量数据来确定空气或水污染的位置、扩散情况和污染程度等。这类问题的简单模型可由下列分布式参数系统给出：

$$\nabla k \nabla u - \frac{\partial}{\partial t} + f(\boldsymbol{x},t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad 0 < t < \infty \tag{5.107}$$

其中 $k(\boldsymbol{x})$ 为已知扩散系统，$f(\boldsymbol{x},t)$ 是未知的外界作用力，Ω 为 n 维空间 R^n 上的有界区域。初始条件和边界条件如下：

初始条件： $u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega$

边界条件： $\dfrac{\partial u}{\partial n} = q(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma$

其中 n 为单位法向量，Ω 是一个有界区域，Γ 是 Ω 的边界。

此外，$u(\boldsymbol{x},t)$ 在 Γ 的全部或局部边界 Γ_η 上已知。则外界作用力的识别问题是从已知的 $u_0(\boldsymbol{x})$、$q(\boldsymbol{x},t)$、$k(\boldsymbol{x})$ 和边界 Γ_η 上的观察值确定 $f(\boldsymbol{x},t)$。

5.5.2 最佳摄动量法

考虑作用在整个区域 Ω 上的外界力为如下形式：

$$f(\boldsymbol{x},t,\xi) = \sum_{i=1}^{l} (f_i + h_i e^{g_i t}) e^{\sigma_i r_i^2} \tag{5.108}$$

其中 $\xi = (f_1, h_1, g_1, \sigma_1, \boldsymbol{x}_1, \cdots, f_l, h_l, g_l, \sigma_l, \boldsymbol{x}_l)$，$\boldsymbol{x}_i$ 表示一个外界力的作用位置，$r_i = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i|$，$\sigma_i$ 是一个表示作用范围的一个参数。

若 $\boldsymbol{x}_i$ 为一、二、三维空间上的点，则 ξ 分别为 $5l$、$6l$、$7l$ 维空间上的向量，并统一将 ξ 视为 L 维空间上的向量。

一般地，$u_\eta(\boldsymbol{x},t)$ 只能知道在一些离散点上的数值，不妨假设 $u_\eta(\boldsymbol{x},t)$ 在 $(\boldsymbol{x},t) = (\boldsymbol{x}_j, iT)$ $(i = 1,2,\cdots,I, j = 1,2,\cdots,J, T$ 为采样周期$)$ 已知。因此，识别问题是要利用 $u_0(\boldsymbol{x})$、$k(\boldsymbol{x})$、$q(\boldsymbol{x},t)$ 和 $u_\eta(\boldsymbol{x}_j,$

$iT)(i=1,2,\cdots,I,j=1,2,\cdots,J)$ 来确定 l 和 ξ。

作下列数值迭代过程：

$$\xi^{m+1}=\xi^{m}+\delta\xi^{m},\quad m=0,1,2,\cdots \tag{5.109}$$

其中 ξ^{0} 表示初始未知量的猜测值。为了保证迭代过程收敛，选取的摄动量满足 $\|\delta\xi^{m}\|\leqslant\|\xi^{m}\|$。$\delta\xi^{m}$ 由下列最优化过程确定：

$$\min_{\delta\xi^{m}\in R^{L}}\|u_{q}(x,t)-u^{*}(x,t;\xi^{m}+\delta\xi^{m})\|^{2}_{x\in\Gamma_{q}}+\alpha S(\delta\xi^{m})$$

$$=\min_{\delta\xi^{m}\in R^{L}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}[u_{q}(x_{j},iT)-u^{*}(x_{j},iT;\xi^{m}+\delta\xi^{m})]^{2}+\alpha S(\delta\xi^{m})$$

$$\approx\min_{\delta\xi^{m}\in R^{L}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}[u_{q}(x_{j},iT)-\nabla^{T}_{\xi^{m}}u^{*}(x_{j},iT;\xi^{m})\delta\xi^{m}$$

$$-u^{*}(x,t;\xi^{m})]^{2}+\alpha S(\delta\xi^{m})$$

其中 $S(\delta\xi^{m})$ 表示稳定性函数，α 为正则化参数。$u^{*}(x,t;\xi)$ 满足下列偏微分方程初边值问题：

$$\nabla k\nabla u-\frac{\partial u}{\partial t}+f(x,t,\xi)=0,\quad x\in\Omega,\quad 0<t<\infty$$

$$u(x,0)=u_{0}(x),\quad x\in\Omega \tag{5.111}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=q(x,t),\quad x\in\Gamma$$

令

$$a_{j}(i)=u_{q}(x_{j},iT)-u^{*}(x_{j},iT;\xi^{m})$$

$$b^{T}_{j}(i)=\nabla_{\xi^{m}}u^{*}(x_{j},iT;\xi^{m})$$

则

$$\min_{\delta\xi^{m}\in R^{L}}\|u_{q}(x,t)-u^{*}(x,t;\xi^{m}+\delta\xi^{m})\|^{2}_{x\in\Gamma_{q}}+\alpha S(\delta\xi^{m})$$

$$=\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}(a_{j}(i)-b_{j}(i)\delta\xi^{m})^{2}+\alpha S(\delta\xi^{m}) \tag{5.112}$$

若 $S(\delta\xi^{m})$ 取为 $(\delta\xi^{m})^{T}\delta\xi^{m}$，则上述最优化问题的解由下列方程确定：

$$(\sum_{i=1}^{I}B^{T}(i)B(i)+\alpha E)\delta\xi^{m}=\sum_{i=1}^{I}B^{T}(i)A(i) \tag{5.113}$$

其中

$$A(i)=\begin{bmatrix}a_1(i)\\a_2(i)\\\vdots\\a_J(i)\end{bmatrix},\quad B(i)=\begin{bmatrix}b_1^T(i)\\b_2^T(i)\\\vdots\\b_J^T(i)\end{bmatrix}$$

E 是一个 $L\times L$ 阶实单位矩阵。

一旦 l 固定，则利用迭代过程式(5.109)和求解线性方程组(5.113)来确定 ξ，迭代过程直至达到式(5.110)的最小值。要注意 $\nabla_{\xi^m}u^*(x_j,iT;\xi^m)$ 利用数值方法来计算。

模拟计算

为了方便起见，假设 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$，$u_0(x)=x^2+y^2$，$k(x)=x^2+y^2$，$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_4}=0$，$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_3}=2e^{t}$ $(\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4)$。(见图 5.18)

为了证实上述方法的可行性，对给定一组数 ξ^*，模拟过程如下。

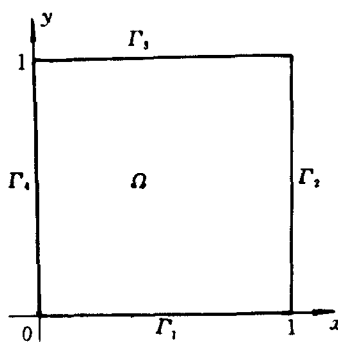


图 5.18　问题的求解区域

首先，选取一组数 ξ^* 作为精确值，在上述定解条件下，利用有限差分法解方程式(5.111)在 Γ_q 上的数值解，并且把它们作为 Γ_q 上的测量值。

然后，固定的 l 选取初始值 ξ^0，利用式(5.109)，(5.111)，(5.113)的数值解，可以得到一组新的数值 ξ^1，按照同样的方法可以得到一组新的数值 ξ^2，这个过程一直继续，直至下面的数值接近 0。

$$ER(u_q,u_L^m)=\|u_q(x,t)-u^*(x,t;\xi^m)\|_{x\in\Gamma_q}$$

(若 ER 不接近于 0，当 ER 达到最小值时，则增加 ξ 的维数，然

后，执行上述过程)，于是，ξ 被重构出来。

为了估计每次迭代的收敛情况，引入下列几个关于迭代次数 m 的函数：

$$\xi_1(m) = 10\log \| \xi^* - \xi^m \|^2$$

$$x_1(m) = 10\log[(x_1^* - x_1^m)^2 + (y_1^* - y_1^m)^2]$$

$$x_2(m) = 10\log[(x_2^* - x_2^m)^2 + (y_2^* - y_2^m)^2]$$

$$J(m) = 10\log \| u_q(\boldsymbol{x},t) - u^*(\boldsymbol{x},t;\xi^m) \|^2_{x\in\Gamma_q}$$

$$g(m) = 10\log \| g(\boldsymbol{x},t;\xi^*) - g(\boldsymbol{x},t;\xi) \|^2$$

例 1 外界的作用力如下：

$$f(\boldsymbol{x},t,\xi^*) = (1 + e^{\ t})e^{[(x-0.5)^2+(y-0.2)^2]} + (0.5 + 0.5e^{\ 2t})e^{1.5[(x\ 0.1)^2-(y\ 0.8)^2}$$

$$\xi^* = (1,1,1,1,0.5,0.2,0.5,0.5,2.,1.5,0.1,0.8)^T$$

令 $\Gamma_q = \Gamma, I = 10, \alpha = 0.0001, \Delta x = \Delta y = T = 0.1$，初始值 ξ^0 为 $(0.6,0.6,0.6,0.5,1.,0.5,1.,0.3,1.5,1.,0.4,0.6)^T$。$\xi_1(m)$、$x_1(m)$、$x_2(m)$、$J(m)$ 关于迭代次数 m 的模拟计算结果见图 5.19(a)～5.19(d)。

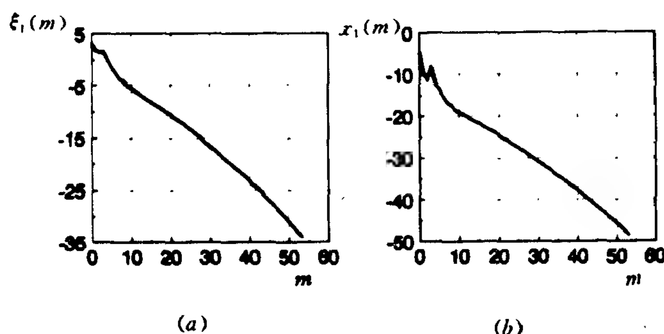


图 5.19(a)～(b)

(a) $\xi_1(m)$ 变化曲线 (b) $x_1(m)$ 变化曲线

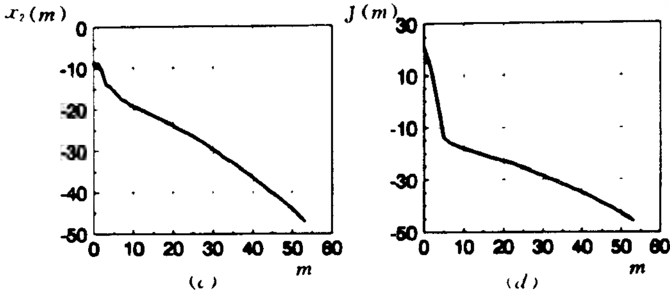


图　5.19(c) ~ (d)
(c) $x_2(m)$ 变化曲线　(d) $J(m)$ 变化曲线

例 2　为了考虑测量中的噪声对重构的影响，用 $u_\eta(x,t)(1+r\%\tau)$（这里 τ 是[−1.1]上的随机数）引入相对随机误差的测量值。外界的作用力如下：

$$f(x,t;\xi^*) = (1+e^{-t})e^{-(x-0.5)^2-(y-0.2)^2}$$

$$\xi^* = (1,1,1,1,0.5,0.5)^T$$

令 $\Gamma_\eta = \Gamma_1 + \Gamma_2$，$I = 10$，$\alpha = 0.0001$，$\Delta x = \Delta y = 0.1$，$T = 0.05$，$r\% = 1\%$，初始值 ξ^0 为 $(0.5,0.5,0.5,0.5,0.1,0.9)^T$。$\xi_1(m)$、$x_1(m)$、$J(m)$ 和 $g(m)$ 关于迭代次数 m 的模拟计算结果见图 5.20(a) ~ 5.20(d)。

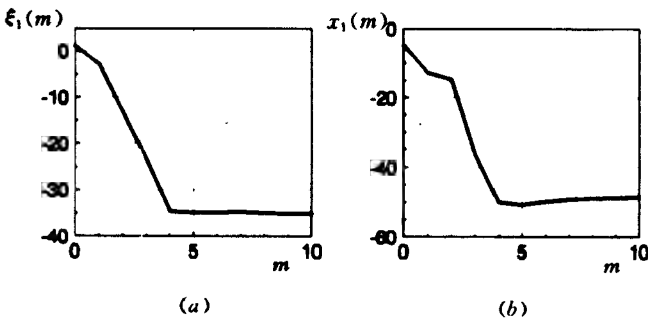
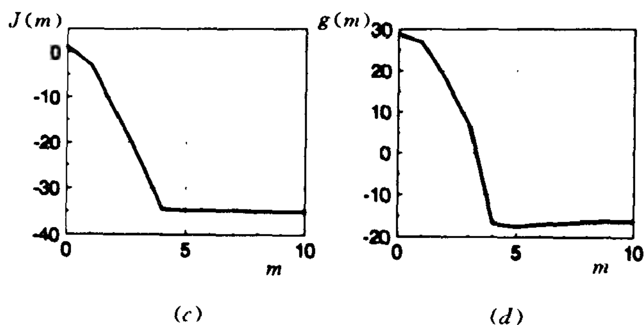


图　5.20(a) ~ (b)
(a) $\xi_1(m)$ 变化曲线　(b) $x_1(m)$ 变化曲线



(c) (d)

图 5.20(c)～(d)

(c) $J(m)$ 变化曲线 (d) $g(m)$ 变化曲线

5.5.3 解决外界力识别问题的最优化方法

假设式(5.107)的 $k(x)$ 为常数 c，并且外界作用力为点函数，即

$$f(\boldsymbol{x},t)=\sum_{k=1}^{l}f_k(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k),\quad \boldsymbol{x}_k\in\Omega \tag{5.114}$$

则该识别问题就是利用 $u_0(\boldsymbol{x})$、$q(\boldsymbol{x},t)$ 和 $u_\eta(\boldsymbol{x},t)$ 来确定 l、$f_k(t)$ 和 $\boldsymbol{x}_k$。

我们知道，$c\Delta u+\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$ 的基本解为

$$u^*(t,\boldsymbol{x},\tau,\boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi c(t-\tau)^{\frac{d}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{r^2}{4c(t-\tau)}} \tag{5.115}$$

其中 d 为 Ω 的维数，$r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in\Omega)$。

将式(5.107)中的变量 $(t,\boldsymbol{x})$ 改为 $(\tau,\boldsymbol{x}')$，然后对该式乘以 u^* 并对 $(\tau,\boldsymbol{x}')$ 进行积分得

$$\int_0^t\int_\Omega\left(c\Delta u-\frac{\partial u}{\partial t}+f\right)u^*\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}\tau=0 \tag{5.116}$$

对上式进行分部积分得

$$\int_0^t\int_\Omega u\left(c\Delta u^* + \frac{\partial u^*}{\partial t}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}\tau + c\int_0^t\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}u^*\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}\tau$$
$$- c\int_0^t\int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_\Omega u^* f\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}\tau - \left[\int_\Omega uu^*\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\right]\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} = 0$$

利用边界条件及 u^* 的性质可得

$$u(\boldsymbol{x},t) = c\int_\Gamma\int_0^t qu^*\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}\tau - c\int_0^t\int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}\tau$$
$$+ \int_\Omega\int_0^t u^* f\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}\tau + \left[\int_\Omega uu^*\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\right]\Bigg|_{\tau=0}, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega \tag{5.117}$$

当 $\boldsymbol{x}\to\Gamma$ 时，便得到下列边界积分方程：

$$a(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x},t) = c\int_\Gamma\int_0^t qu^*\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}\tau - c\int_0^t\int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}\tau$$
$$+ \int_\Omega\int_0^t u^* f\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}\tau + \left[\int_\Omega uu^*\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\right]\Bigg|_{\tau=0}, \quad \boldsymbol{x}\in\Gamma \tag{5.118}$$

其中 $a(\boldsymbol{x})$ 是仅取决于边界 Γ 光滑性的函数。

对每个时刻 t 和函数 f，可以从上述边界积分方程确定 $u(\boldsymbol{x},t)$ 在边界 Γ 上的数值。

根据 $u(\boldsymbol{x},t)$ 在 Γ_q 上可测量，则 $h(\boldsymbol{x},t)=a(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x},t)$ 在 Γ_q 上为已知函数，建立如下泛函：

$$J(f,t) = \left|\frac{a(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x},t) - h(\boldsymbol{x},t)}{a(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x},t)}\right|_{\Gamma_q}^2$$

其中函数 $u(\boldsymbol{x},t)$ 由式(5.118)确定。

考虑到测量值仅在边界的一些离散点上，并且 $f(\boldsymbol{x},t)$ 为 l 个点函数，即 $f_k(t),\boldsymbol{x}_k(k=1,2,\cdots,l)$。则上述泛函可具体表示为

$$J_i(t) = \sum_i\left\{\frac{a(\boldsymbol{x}_i)u(\boldsymbol{x}_i,t) - h(\boldsymbol{x}_i,t)}{a(\boldsymbol{x}_i)u(\boldsymbol{x}_i,t)}\right\}^2 \tag{5.119}$$

其中 $u(x_i,t)$ 由边界积分方程式(5.118)确定，x_i 为边界上的测量点。

一旦 l 固定，则外界力的识别问题就是求泛函 $J_l(t)$ 关于 x_k 和 $f_k(t)$ 的最小值问题。

鉴于上述分析，可建立如下外界力的识别过程：

(1) 令外界力的个数 l 为 1；

(2) 分别对参数 $f_k(t)$ 和 x_k 求 $J_l(t)$ 和 $J_{l+1}(t)$ 的最小值，并记为 $J_l^*(t)$ 和 $J_{l-1}^*(t)$；

(3) 计算 $J_l^*(t)$ 与 $J_{l-1}^*(t)$ 的相对差 R

$$R = \left| \frac{J_l^*(t) - J_{l-1}^*(t)}{J_l^*(t)} \right|$$

(4) 若 $R < \varepsilon$(g 给定的某个正数)，则进入(5)，否则对 l 增加 1，并进入(2)；

(5) 确定外界力的个数为 l，并给出 $f_k(t)$、x_k。

数值算例

考虑如下二维分布式参数系统的外界力 $f(x,t)$ 的识别问题：

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{l} f_k(t)\delta(x - x_k) = 0$$

初始条件：　　$u(x,y,0) = 0,\quad (x,y) \in \Omega$

边界条件：　　$\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0,\quad (x,y) \in \Gamma$

区域 Ω、边界 Γ、边界上的12个可测量点和两个外界力的点位置见图 5.21 所示。

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \mid x = 5,\quad -4 \leqslant y < 4\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \mid -5 < x \leqslant 5,\quad y = 4\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x,y) \mid x = -5,\quad -4 < y \leqslant 4\}$$

$$\Gamma_4 = \{(x,y) \mid -5 \leqslant x < 5,\quad y = -4\}$$

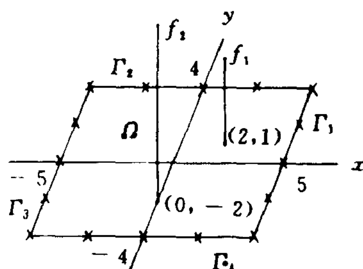


图 5.21　外界作用力和测量点位置示意图

× 表示测量点　· 表示外界作用力点

在可测量点上，$u(x,t)$ 仅在 $\tau = 0.1, 0.2, 0.3, \cdots$ 上采集数据。并且这些数据在给定 $f(x,t)$ 下利用有限差分法模拟产生。

边界上的单元由上述 12 个测量点和 4 个角点构成，共有 16 个单元。考虑实际外界力的形式如下：

$$f(\boldsymbol{x},t) = 1\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) + 2\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_2)$$

其中 $\boldsymbol{x}_1 = (2,1), \boldsymbol{x}_2 = (0, -2)$。

选取两组外界力的逼近形式：

(1) $f(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{l} h_k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k)$

(2) $f(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{l} h_k e^{a_k t} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k)$

识别的计算结果见表 5.1。

表 5.1

参数	精确值	第一组参数			第二组参数		
		$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	2	2	2	2	2	2	2
x_1	2	2.0002	2.0019	2.0027	0.0022	2.0028	2.0059
y_1	1	0.9994	1.0024	1.0037	1.0014	1.0027	1.0055
x_2	0	-0.0051	0.0004	0.0012	-0.0047	0.0001	0.0011
y_2	-2	-1.9993	-1.9990	-1.9999	-2.0019	-1.9948	-1.9937
h_1	1	1.0030	0.9984	0.9984	1.012 5	1.0007	1.0055
h_2	2	2.0039	1.9995	1.9987	2.0228	1.9811	1.9778
a_1	0	—	—	—	0.0661	0.0052	0.0098
a_2	0	—	—	—	0.0552	0.0197	-0.0128
J_t^*	—	0.000 53	0.000021	0.000038	0.00049	0.000007	0.00002

5.6 石油开采方面的一类逆问题

5.6.1 问题的提出

在石油工业中，经常利用二次采油和强化采油来提高油田的利用效率和石油的产量。这个过程的关键一步是通过在一些井口对油田注入水或化学液体以便产生压力驱赶油田中的石油从采油井口喷出。要使这个过程成功必须要保持石油与注入液体之间的接面。接面的运动过程和能否保持接面的稳定完全取决于油田的结构(例如渗透率，孔隙率等)和注入液体的特性。如果石油与注入液体之间的接面不能保持稳定，则注入液体就不能有效的将石

油驱赶的采油井口。因此，数值模拟这个过程是非常重要的。我们可以建立二次采油或强化采油的数学模型，并利用数值解来预估油田的特性和石油与注入液体之间的接面的运动过程。

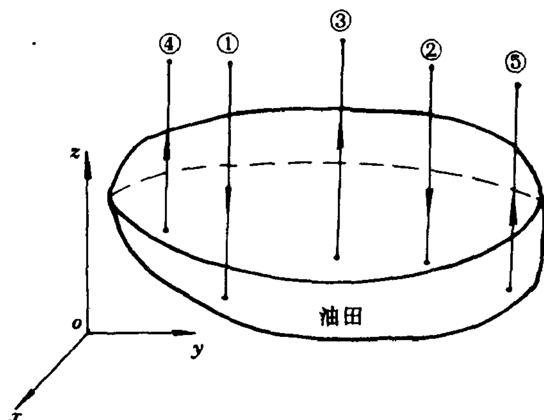


图 5.22 二次采油油田几何示意图

①、② 为注入液体的井口 ③、④、⑤ 为采油的井口

对于一个三维两相略微可压缩、不可混合的油田的数学模型，可用下列非线性偏微分方程给出：

$$\nabla(kk_{ro}\mu_o^{-1}\nabla p_o) - C_o\varphi s_o\frac{\partial p_o}{\partial t} - \varphi\frac{\partial s_o}{\partial t}$$

$$= \rho_o^{-1}q_o - \eta\nabla(kk_{ro}\mu_o^{-1}\rho_o g),\quad t > 0 \tag{5.120}$$

$$\nabla(kk_{rw}\mu_w^{-1}\nabla p_w) - C_w\varphi s_w\frac{\partial p_w}{\partial t} - \varphi\frac{\partial s_w}{\partial t}$$

$$= \rho_w^{-1}q_w - \eta\nabla(kk_{rw}\mu_w^{-1}\rho_w g),\quad t > 0 \tag{5.121}$$

$$s_o + s_w = 1,\quad p_o - p_w = \sum_{i=0}^{3} a_i s_w^i,\quad x \in \Omega \tag{5.122}$$

初始条件：

$$p_j(x,0) = P_j(x),\quad s_j(x,0) = S_j(x) \tag{5.123}$$

边界条件：

$$\left.\frac{\partial p_j}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0,\left.\frac{\partial s_j}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0,\quad j=o,w,\quad t>0 \quad (5.124)$$

参数说明：

下角标 o,w 表示石油相和水相。Ω 表示油田区域，$\partial\Omega$ 表示油田的边界，边界条件说明了石油和水不可能从 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 流到油田之外的区域。φ 表示孔隙率，p 表示压力，s 表示饱和度，k 表示绝对渗透率，C 表示可压缩度，μ 表示粘度（粘性系数），η 表示转换常数，g 表示重力加速度，q 表示水或石油流动速率。当 $q<0$ 时，则表示注入过程，当 $q>0$ 时，则表示产出过程。由于注入和产出都只能在井口处进行，因此，q 一般可以视为点源函数，即

$$q=\sum_{i=1}^{l}q_i(x_i,t)\delta(x-x_i)$$

k_{ro} 表示关于石油的相对渗透率；k_{rw} 表示水的相对渗透率。一般地

$$k_{ro}=\mu_o\sum_{i=0}^{3}\alpha_i s_o^i,\quad k_{rw}=\mu_w\sum_{i=0}^{3}\beta_i s_w^i \quad (5.125)$$

如果所有的参数都已知，则利用数值方法求解由式(5.120)～(5.125)构成偏微方程定解问题，并可以了解“接面”的运动情况。

但在实际问题中，上述偏微分方程中的参数 k、φ、$\partial\Omega$ 往往是未知的。它们分别是岩石的绝对渗透率、岩石的孔隙率。由于钻井的费用巨大，人们不能钻很多井来采到岩石样本并测定它的绝对渗透率、孔隙率，从而来估计整个油田的绝对渗透率、孔隙率，并估计油田的边界。

虽然油田的真正的绝对渗透率、孔隙率的分布函数 $k(x)$ 和 $\varphi(x)$ 不能直接测量得到，但是，我们可以从一些进口处（包括油井口和注入液体的井口）测得在一段时间内的饱和度 s_j 和压力 p_j。在石油工业中，利用这些数据来估计 $k(x)$、$\varphi(x)$ 或 $\partial\Omega$ 的问题称为时间匹配问题(History Matching)。

5.6.2　解决时间匹配问题的 GPST 方法

为了简便起见，上述问题简化为：从已知的方程组(5.120)～(5.125)在一些时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_N$ 的 $q_o(\boldsymbol{x}, t), q_w(\boldsymbol{x}, t)$ 在 $\boldsymbol{x}_i (i = 1, 2, \cdots, l)$ 处的 $s_j, p_j (j = o, w)$ 及 $\partial\Omega$ 来确定绝对渗透率 $k(\boldsymbol{x}, t)$。

方程组(5.120)～(5.123)给出了关于四个未知量 s_o, s_w, p_o, p_w 的四个方程。从式(5.120)～(5.125)不难看出其正问题是关于这些未知量的非线性偏微分方程。

下面介绍解决上述逆问题的 GPST 方法。

令

$$\begin{cases} p_{j,n-1} = p_{j,n} + \delta p_{j,n} \\ s_{j,n-1} = s_{j,n} + \delta s_{j,n}, \quad j = o, w, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\ k_{n-1}(\boldsymbol{x}) = k_n + \delta k_n \end{cases} \tag{5.126}$$

$k_0(\boldsymbol{x})$ 表示 $k(\boldsymbol{x})$ 的初试猜测量。$\{p_{j,n}, s_{j,n}\} (j = o, w)$ 表示当绝对渗透率为 $k_n(\boldsymbol{x})$ 时的一组解。

由摄动法原理可知，当 δk_n 很小时，$\delta p_{j,n}, \delta s_{j,n}$ 的变化也是很小。把式(5.126)代入式(5.120)～(5.125)，并忽略关于 δk_n，$\delta p_{j,n}, \delta s_{j,n}$ 的高阶项，可得到关于 $\{k_n, p_{j,n}, s_{j,n}\}$ 的偏微分方程的初边值问题

$$\begin{aligned} &\nabla (k_n k_{ro,n} \mu_o^{\ 1} \nabla p_{o,n}) - C_o \varphi s_{o,n} \frac{\partial p_{o,n}}{\partial t} - \varphi \frac{\partial s_{o,n}}{\partial t} \\ &= \rho_o^{\ 1} q_o - \eta \nabla (k_n k_{ro,n} \mu_o^{\ 1} p_o g), \quad t > 0 \end{aligned} \tag{5.127}$$

$$\begin{aligned} &\nabla (k_n k_{rw,n} \mu_w^{\ 1} \nabla p_{w,n}) - C_w \varphi s_{w,n} \frac{\partial p_{w,n}}{\partial t} - \varphi \frac{\partial s_{w,n}}{\partial t} \\ &= \rho_w^{\ 1} q_w - \eta \nabla (k_n k_{rw,n} \mu_w^{\ 1} p_w g), \quad t > 0 \end{aligned} \tag{5.128}$$

$$s_{o,n} + s_{w,n} = 1, \quad p_{o,n} - p_{w,n} = \sum_{i=0}^{\mathrm{I}} a_i s_{w,n}^i, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{5.129}$$

$$p_{j,n}(\boldsymbol{x}, 0) = P_j(\boldsymbol{x}), \quad s_{j,n}(\boldsymbol{x}, 0) = S_j(\boldsymbol{x}) \tag{5.130}$$

$$\left.\frac{\partial p_{j,n}}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0,\quad \left.\frac{\partial s_{j,n}}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0,\quad j=o,w,\quad t>0 \tag{5.131}$$

以及关于 $\delta k_n,\delta p_{j,n}$ 和 $\delta s_{j,n}$ 的偏微分方程的初边值问题

$$\begin{aligned}&\nabla(k_n k_{ro,n}\mu_o^{-1}\nabla\delta p_{o,n})+\nabla(k_n\sum_{i=1}^{3}i\alpha_i s_{o,n}^{i-1}\delta s_{o,n}\nabla p_{o,n})\\&\quad-C_o\varphi\,\delta s_{o,n}\frac{\partial p_{o,n}}{\partial t}-C_o\varphi\, s_{o,n}\frac{\partial\delta p_{o,n}}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\delta s_{o,n}}{\partial t}\\&\quad+\eta\nabla(k_n\rho_o g\sum_{i=1}^{3}i\alpha_i s_{o,n}^{i-1}\delta s_{o,n})\\&=-\nabla(\delta k_n k_{ro,n}\mu_o^{-1}\nabla p_{o,n})-\eta\nabla(\delta k_n k_{ro,n}\mu_o^{-1}\rho_o g)\\&\equiv K_{o,n}(x,t,s_{o,n},p_{o,n},\delta k_n),\quad t>0\end{aligned}\tag{5.132}$$

其中 $K_{o,n}$ 是关于 δk_n 的线性泛函；

$$\begin{aligned}&\nabla(k_n k_{rw,n}\mu_w^{-1}\nabla\delta p_{w,n})+\nabla(\delta k_n\sum_{i=1}^{3}i\beta_i s_{w,n}^{i-1}\delta s_{w,n}\nabla p_{w,n})\\&\quad-C_w\varphi\,\delta s_{w,n}\frac{\partial p_{w,n}}{\partial t}-C_w\varphi\, s_{w,n}\frac{\partial\delta p_{w,n}}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\delta s_{w,n}}{\partial t}\\&\quad+\eta\nabla(k_n\rho_w g\sum_{i=1}^{3}i\beta_i s_{w,n}^{i-1}\delta s_{w,n})\\&=-\nabla(\delta k_n k_{rw,n}\mu_w^{-1}\nabla p_{w,n})-\eta\nabla(\delta k_n k_{rw,n}\mu_w^{-1}\rho_w g)\\&\equiv K_{w,n}(x,t,s_{w,n},p_{w,n},\delta k_n),\quad t>0\end{aligned}\tag{5.133}$$

其中 $K_{w,n}$ 是关于 δk_n 的线性泛函；

$$\delta s_{o,n}+\delta s_{w,n}=0,\quad \delta p_{o,n}-\delta p_{w,n}=\sum_{i=1}^{3}ia_i s_{w,n}^{i-1}\delta s_{w,n},\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{5.134}$$

$$\delta p_{j,n}(x,0)=\delta s_{j,n}(x,0)=0,\quad j=o,w,\quad x\in\Omega,\qquad n=0,1,2,\cdots,\quad t>0 \tag{5.135}$$

$$\frac{\partial\delta p_{j,n}(x,0)}{\partial n}=\frac{\partial\delta s_{j,n}(x,0)}{\partial n}=0,\quad j=o,w,\quad x\in\partial\Omega,\qquad n=0,1,2,\cdots,\quad t>0 \tag{5.136}$$

利用式(5.134)将方程式(5.132)、(5.133)中的关于 $\delta s_{o,n}$，

$\delta s_{w,n}$ 量用关于 $\delta p_{o,n}$ 和 $\delta p_{w,n}$ 量来代替 $\left(\text{因为 } \delta s_{w,n} = \dfrac{\delta p_{o,n} - \delta p_{w,n}}{\sum_{i=1}^{3} i a_i s_{w,n}^{i-1}}\right)$，这样就得到关于 $\delta p_{o,w}$ 和 $\delta p_{w,n}$ 的偏微分方程组

$$\begin{aligned}
&\nabla(k_n a_{o,n} \nabla \delta p_{o,n}) + \nabla(k_n b_{o,n}(\delta p_{o,n} - \delta p_{w,n}) \nabla p_{o,n}) \\
&\quad - C_{o,n} \frac{\partial \delta p_{o,n}}{\partial t} - d_{o,n}(\delta p_{o,n} - \delta p_{w,n}) \\
&\quad - \varphi \frac{\partial (\delta p_{o,n} - \delta p_{w,n}) e_{o,n}}{\partial t} \\
&\quad + \eta \nabla(k_n f_{o,n} g(\delta p_{o,n} - \delta p_{w,n})) = K_{o,n} \qquad (5.132')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla(k_n a_{w,n} \nabla \delta p_{w,n}) + \nabla(k_n b_{w,n}(\delta p_{o,n} - \delta p_{w,n}) \nabla p_{w,n}) \\
&\quad - C_{w,n} \frac{\partial \delta p_{w,n}}{\partial t} - d_{w,n}(\delta p_{o,n} - \delta p_{w,n}) \\
&\quad - \varphi \frac{\partial (\delta p_{o,n} - \delta p_{w,n}) e_{w,n}}{\partial t} \\
&\quad + \eta \nabla(k_n f_{w,n} g(\delta p_{o,n} - \delta p_{o,n})) = K_{w,n} \qquad (5.133')
\end{aligned}$$

$$\delta p_{j,n}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega$$

$$\frac{\partial \delta p_{j,n}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial n} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0$$

其中 $a_{j,n} = k_{rj,n} \mu_j^{-1}$，$b_{o,n} = -\dfrac{\sum_{i=1}^{3} i \alpha_i s_{o,n}^{i-1}}{\sum_{i=1}^{3} i a_i s_{w,n}^{i-1}}$，$b_{w,n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} i \beta_i s_{w,n}^{i-1}}{\sum_{i=1}^{3} i a_i s_{w,n}^{i-1}}$

$$C_{j,n} = C_j \varphi s_{j,n}, d_{j,n} = (-1)^j \frac{C_j \varphi \dfrac{\partial p_{j,n}}{\partial t}}{\sum_{i=1}^{3} i a_i s_{w,n}^{i-1}}$$

$$e_{j,n} = (-1)^j \frac{1}{\sum_{i=1}^{3} i a_i s_{w,n}^{i-1}}, \quad f_{j,n} = (-1)^j \frac{\rho_j \sum_{i=1}^{8} i \alpha_i s_{j,n}^{i-1}}{\sum_{i=1}^{3} i a_i s_{w,n}^{i-1}}$$

$$j=o,w,\qquad (-1)^j=\begin{cases}-1, & j=o\\ 1, & j=w\end{cases}$$

利用Green函数方法并令$(\boldsymbol{x},t)$分别取值为$(\boldsymbol{x}_h,t_m)(h=1,2,\cdots,H,m=1,2,\cdots,M)$，用测量值$p_j^*$，$s_j^*$分别代替$p_{j,n+1}$和$s_{j,n+1}$，可得关于$\delta k_n(\boldsymbol{x})$的第一类Fredholm积分方程

$$\int_0^T\iiint_\Omega G_n(\boldsymbol{x}_h,t_m,\boldsymbol{x}',t')\cdot\begin{bmatrix}K_{o,n}\\ K_{w,n}\end{bmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}t'$$

$$=\begin{bmatrix}p_o^*(\boldsymbol{x}_h,t_m)-p_{o,n}(\boldsymbol{x}_h,t_m)\\ p_w^*(\boldsymbol{x}_h,t_m)-p_{w,n}(\boldsymbol{x}_h,t_m)\end{bmatrix},$$

$$n=0,1,2,\cdots,\ h=1,2,\cdots,H,\ m=1,2,\cdots,M \tag{5.137}$$

其中$G_n(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')$为(5.132′)～(5.133′)方程的Green函数。

因此，由方程式(5.125)～(5.131)和(5.137)构成GPST的基本迭代格式。

5.6.3　计算与编程方面应考虑的问题

如果我们对第一类Fredholm积分方程式(5.137)和Green函数G_n直接采用离散化，并计算它们的数值解，这样所需的计算量非常巨大。一种更有效的方法是直接对非线性偏微分方程组(5.132′)～(5.133′)进行离散化。例如，在时间域上采用一阶向后差分，即令

$$p(x_i,y_j,z_u,t_r)=p_{i,j,u,r}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{(x_i,y_j,z_u,t_r)}=\frac{p_{i,j,u,r}-p_{i,j,u,r-1}}{\Delta t} \tag{5.138}$$

在空间域上采用标准的七点格式进行离散化，即令

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{(x_i,y_j,z_u,t_r)}=(k_{i-1/2,j,u}p_{i-1,j,u,r}-(k_{i-1/2,j,u}$$

$$+k_{i+1/2,j,u})p_{i,j,u,r}$$

$$+ k_{i+1/2,j,u}p_{i+1,j,u,r})\frac{1}{\Delta x^2} \qquad (5.139)$$

对式(5.132′)～(5.133′)进行离散化便得下列线性代数方程组：

$$C_{n,m}\cdot\delta F_{n,m} = D_{n,m}\delta K_n + B_{n,m}\cdot\delta F_{n,m-1},$$
$$m = 1,2,\cdots,M-1 \qquad (5.140)$$

其中$C_{n,m}$,$D_{n,m}$和$B_{n,m}$分别为$2N\times 2N$,$2N\times N$和$2N\times 2N$的带状矩阵,N为空间域内的分节点总数,$\delta F_{n,m}$为关于$(\delta p_{o,n},\delta p_{w,n})$在$t_m$时刻所有分节点上的数值,它为$2N$维列向量。$\delta K_n$为$\delta k_n$在所有空间分节点上的数值所构成的$N$维列向量。

由于$C_{n,m}$为可逆矩阵,则由式(5.140)得

$$C_{n,m}^{-1}D_{n,m}\delta K_n = \delta F_{n,m} - C_{n,m}^{-1}B_{n,m}\delta F_{n,m-1},$$
$$m = 1,2,\cdots,M \qquad (5.141)$$

在上述方程组中挑选那些在$x = x_h(h = 1,2,\cdots,H)$(即已知的测量量)和在$t_m(m = 1,2,\cdots,M)$时刻,并用$(p_o^* - p_{o,n},p_w^* - p_{w,n})((p_{o,n},p_{w,n})$为由式(5.126)～(5.131)所构成的方程的解)代替$(\delta p_{o,n},\delta p_{w,n})$,便可得到关于$\delta K_n$的线性代数方程组

$$A_n\delta K_n = E_n, \qquad n = 0,1,2,\cdots \qquad (5.142)$$

其中A_n为$2HM\times N$阶矩阵,E_n为$2HM$维列向量。

这样我们便可以避免计算Green函数G_n的困难和巨大的计算工作量。上述所形成的线性方程组(5.142)比式(5.137)离散化得到线性方程组形式更为简单。

由于逆问题本身是一个不适定问题,所以离散化后得到的式(5.142)一般是病态方程组。因此我们应采用Tikhonov正则化方法来求解,即

$$(A_n^T\cdot A_n + \lambda I)\cdot\delta K_n = A_n^T\cdot E_n, \quad n = 0,1,2,\cdots \qquad (5.143)$$

因此,由式(5.125)～(5.131)和(5.142)的离散化方程构成了GPST的基本的数值计算的结构。其示意图见框图5.23。

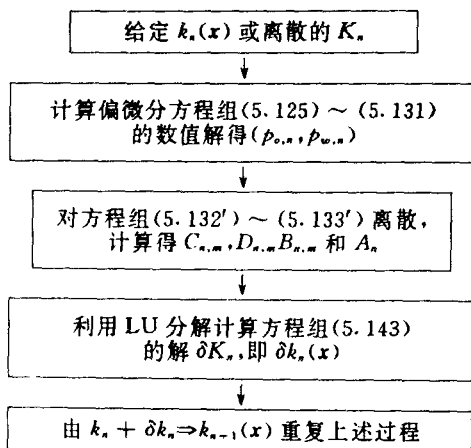


图 5.23 GPST 计算框图

解决上述问题的 GPST 方法，每次迭代所需的计算量估计：

(1) 解决式(5.125)～(5.131)的非线性偏微分方程的数值解，需要做①$2N \times 2N$ 阶矩阵(带宽为 $O(\sqrt{2N})$)的 LU 分解；②采用修正的 Newton 迭代法求解非线性方程组，并且假设 5 次就能收敛到一定的精度。则总的浮点运算量为 $O\{4MN\sqrt{N}(2N\sqrt{N}+5\sqrt{2})\}$。

(2) 形成式(5.142)所需的浮点运动算量为 $O\{4HMN\sqrt{N}(2\sqrt{N}+\sqrt{2})\}$。

(3) 形成式(5.143)所需的浮点运动量为 $O\{4HMN(N+1)\}$。

(4) 计算式(5.143)采用 LU 分解所需的浮点运算量为 $O\left\{\frac{1}{3}N^3+2N^2\right\}$；则每次迭代所需的浮点运算量为 $O\left\{\frac{1}{3}N^3+4MN^2(3H+2)\right\}$。

5.6.4 模拟计算实例

在没有实际测量数据的情况下，为了验证 GPST 方法解决三维两相略微可压缩、不可混合的油田的时间匹配问题的可行性，我们按下列过程来模拟处理。

(1) 选取初始值 $P_j(x)$ 和 $S_j(x)(j=o,w)$，并选定 $k^*(x)$ 为逆问题需要确定的绝对渗透率分布函数。利用数值方法计算偏微分方程组(5.125) ~ (5.131)，便可得 $p_j^*(x_h,t_m)$ 和 $s_j^*(x_h,t_m)(j=o,w,h=1,2,\cdots,H$、$m=1,2,\cdots,M)$、并把它们视为实际测量数据。

(2) 选取初始猜测函数 $k_0(x)$、按照图 5.23 的 GPST 数值计算框图，可得 $k_1(x),k_2(x),\cdots$，直到 $k_n(x)$ 达到极限为止。

GPST 方法的计算精度可用 $k_n(x)-k^*(x)$ 的任一种范数来衡量。

计算实例：

假设油田的区域为长方体，将长方体区域划分为 $5\times3\times2$，并且 $\Delta x=\Delta y=152.4$ m，$\Delta z=10.4$ m，时间步长为 $\Delta t=0.864$ Gs，$\mu_o=1$ MPa·s，$\mu_w=0.3$ MPa·s，$C_o=C_w=2.176\ (\mathrm{GPa})^{-1}$，$\varphi=0.2$，$q_o=q_w=983.2\ \mathrm{m^3/s}$，$g=0$，$S_o(x)=S_w(x)=0.3$，$P_o(x)=P_w(x)=10.34$ GPa，$H=4$，$M=3$。$p_j^*(x)$ 和 $s_j^*(x)$ 在三个不同层上的测量数据，在两个点注入液体。初始猜测函数 $k_0(x)$、精确函数 $k^*(x)$ 和迭代四次的重构函数 $k_4(x)$ 见图 5.24。

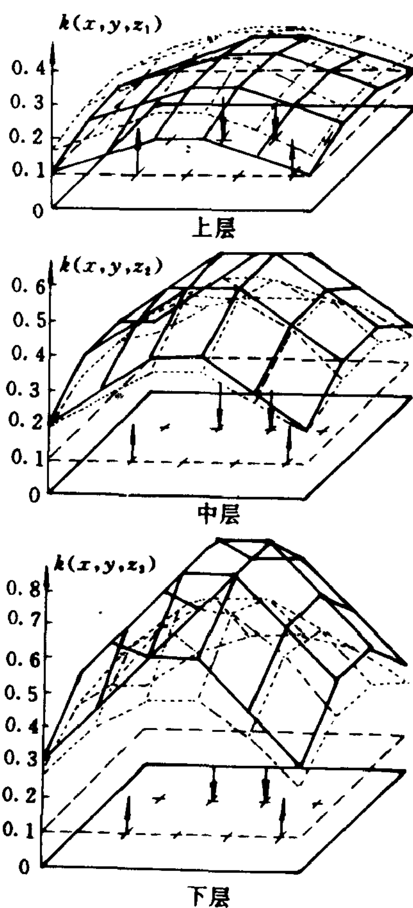


图 5.24

↑ 采油点位置　↓ 注入液体点位置

虚线为 $k_0(x)$　实线为 $k^*(x)$　点线为 $k_4(x)$

参考文献

[1] Backus, G., Gilbert, F., Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems, Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 13, 247－276, 1967.

[2] Backus, G., Gilbert, F., The resolving power of gross earth data, Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 16, 169－205, 1968.

[3] Backus, G., Gilbert, F., Uniqueness in the inversion of inaccurate gross earth data, Philos. Trans. Roy. Soc., Ser. A, 266, 123—192, 1970.

[4] Baus, T. A., A numerical method for electromagnetic inverse scattering problems of anisotropic cylindrical obstacles, Ph. D. dessertation, State University of New York, Stony Brook, 1990.

[5] Boerner W. M, et al (ed.), Inverse methods in electromagnetic imaging, NATO ASI Series, Mathematical and physical sciences, Vol. 143.

[6] Cannon, J. R., Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation, Duke Math. J., 30, 313—323, 1963.

[7] Cannon, J. R., Determination of certain parameters in heat conduction problems, J. Math. Anal. Appl., 8, 188—201, 1964.

[8] Cannon, J. R. and Duchateau, P., Determination of unknown physical properties in heat conduction problems, Int. J. Engrg. Sci., 11, 783—794, 1973.

[9] Cannon, J. R. and Duchateau, P., Determination of unknown coefficients in a nonlinear heat conduction problem, SIAM J. Appl. Math., 24, 298—314, 1973.

[10] Cannon, J. R, and Duchateau, P., Determination of unknown coefficients in parabolic operators from overspecified initial - boundary data, J. Heat Transfer., 100, 503—507, 1978.

[11] Cannon, J. R. and Duchateau, P., An inverse problem for a nonlinear diffusion equation, SIAM J. Appl. Math., 39, 272—289, 1980.

[12] Cannon, J. R., Yin, H. M., A uniqueness theorem for a class of parabolic inverse problems, Inverse Problems, 4, 411—416, 1988.

[13] Caorsi, S., et al, Microwave imaging by three-dimensional Born linearization of electromagnetic scattering, Radio Science, Vol. 25, 1221—1229, 1990.

[14] Caorsi, S., et al, A multiview microwave imaging system for two-dimensional penetrable objects, IEEE Trans, MTT Vol. 39, 845—851, 1991.

[15] Chang S. and Yeh, W., A proposed algorithm for the solution of the large-scale inverse problem in groundwater, Water Resource Res. 12, 365—374, 1976.

[16] Chavent, M. G., et al, History matching by use of optimal theory, Soc. Pet. Eng. J. 259, 74—86, 1975.

[17] 陈璋，侯宗义，李民忠著，《积分方程论及其应用》，上海科学技术出版社，1987年。

[18] Chen, Y. M., Liu, J. Q., A numerical algorithm for remote sensing of thermal conductivity, J. Compt. Phys., 43, 315—326, 1981.

[19] Chen, Y. M., Weng, X. T., Computer-aided synthesis of lossless nonuniform lines of finite length, Circuit Theory & Applic., 10, 69—79, 1982.

[20] Chen, Y. M., Lin, Y., An iterative algorithm for solving inverse problems in structural dynamics, Int. J. for Numerical Methods in Eng., 19, 149—163, 1983.

[21] Chen, Y. M., Liu, J. Q., A numerical alogrithm for solving inverse problems of two-dimensional wave equations, J. Comput. Phys., 50, 193—208, 1983.

[22] Chen, Y. M., Liu, J. Q., An iterative numerical alogrithm for solving multi-parameter inverse problems of evolutional partial differential equations, J. Comput. Phys., 53, 429—442, 1984.

[23] Chen, Y. M., Xie, G. Q., A numerical method for simultaneous determination of bulk modulus, shear modulus and density variations for nondestructive evaluation, Nondestructive Testing Communications, 1, 125—135, 1984.

[24] Chen, Y. M., Generalized pulse-spectrum technique, Geophysics, 50, 1664—1675, 1985.

[25] Chen, Y. M., Xie, G. Q., An iterative method for simultaneous determination of bulk and shear moduli and density variations, J. Comput. Phys., 62, 143—163, 1986.

[26] Chen, Y. M., M. S. Liu, Efficiency improvement of GPST inversion algorithm, J. Comput. Phys., 72, 372—382, 1987.

[27] Chen, Y. M., Parallelism in hierarchy of GPST inverse algorithm for elastic wave equation, Appl. Numer. Math., 4, 83—95, 1988.

[28] Chen, Y. M., Zhang, F. G., Hierarchical multigrid strategy for efficiency improvement of the GPST inverse algorithm, Appl. Numer. Math., 6, 431—446, 1989.

[29] Chen, Y. M., et al, GPST inversion algorithm for history matching in 3-D 2-phase simulator, IMACS Trans. Scientific Computing -' 88 V. 1. 1/1. 2: Numerical and Applied Mathematics, ed. W. F. Ames and Brezinski, 369—374, 1989.

[30] Chen, W. H., G. R. Gavalas, J. H. Seinfeld and M. L. Wasserman, A new algorithm for automatic history matching, Soc. Pet. Eng. J., 257, 593—608, 1974.

[31] Clearbout, J. F., Fundamentals of Geophysical Data Processing with Applications to Petroleum Prospecting, McGraw-Hill, New York, 1976.

[32] Colton, D., Monk, P., A new method for solving the inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium I, Inverse Problems, 5, 1013—1026, 1989.

[33] Colton, D., Monk, P., A new method for solving the inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium II,

Inverse Problems, 6, 935—947, 1989.

[34] Colton, D. ,Monk, P. , The numerical solution of an inverse scattering problem for acoustic waves, IMA J. Appl. Math. , 49,163—184, 1992.

[35] Colton, D. , Monk, P. , A comparision of two methods for solving the inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium, J. Comput. Appl. Math. , 42, 5—16, 1992.

[36] Devaney, A. J. , Recontructive tomography with diffracting wavefield, Inverse problems, Vol. 2, 161—183, 1986.

[37] Douglas, J. , JR. and Jones, B. F. , JR. , The determination of a coefficient in a parabolic differential equation Part Ⅱ. Numerical approximation, J. Math. Mech. , 11, 919—926, 1962.

[38] 冯康等编,《数值计算方法》,国防工业出版社, 1978 年。

[39] 复旦大学数学系主编,《数学物理方程》(第二版),上海科学技术出版社, 1961 年。

[40] 葛德彪著,《电磁逆散射原理》,西北电讯工程学院出版社, 1987 年。

[41] Gladwell, G. M. L. , Inverse problems in vibrations, Martinus Nijhoff Pub. , 1986.

[42] Glowinski, R. , et al, First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, Proceedings in Applied Mathematics 30, 1987.

[43] Greff, E. , Mantel, J. , An engineering approach to the inverse transonic wing desing problem, Comm. Appl. Num. Meth. , Vol. 2, 47—56, 1986.

[44] 韩天敏,《病态线性代数方程组的一种迭代解法》,《应用数学学报》,第 3 期, 28—34, 1977 年。

[45] Hatcher, R. P. , Chen, Y. M. , An iterative method for solving inverse problems of a nonlinear wave equations, SIAM J. Sci. Stat. Comput. , 4, 149—163, 1983.

[46] Heim, D. S. , Sharpe, C. B. , The syntheses of nonuniform lines of finite length, IEEE Trans. , CT-14, 394—403, 1967.

[47] 华俊，张仲寅，乔志德，王培生，《一种跨音速翼型设计方法及设计诸例》，《航空动力学学报》，Vol. 8，No. 2，117—122，1990年。

[48] Ivanov, V. K., Ill-posed linear problem, Doklady Akad. Nauk SSSR, 145, 2 (1962).

[49] Ivanov, V. K., On ill-posed problems. Matematicheskiy sbornik, 61, 2 (1963).

[50] Jones, B. F., JR., The determination of a coefficient in a parabolic differential equation Part I. Existence and uniqueness, J. Math. Mech., 11, 907—918, 1962.

[51] 康立山，孙乐林，陈毓屏著，《解数学物理问题的异步并行算法》，科学出版社，1985年。

[52] Kleinman, R. E., et al, A modified gradient method for two-dimensional problems in tomography, J. Comput. Appl. Math., 42, 17—35, 1992.

[53] Ladas, K. T., Devaney, A. J., Generalized ART algorithm for diffraction tomography, Inverse Problems, 7, 109—125, 1991.

[54] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., Fluid Mechanics, Pergamon Press, Lodon, 1959.

[55] Lee, T., Seinfeld, J. H., Estimation of two phase petroleum reservoir properties by regularization, J. Comput. Phys., 69, 397—419, 1987.

[56] 李建华，唐隆基，欧阳非，《解二维弹性波方程反问题的迭代算法》，《数值计算与计算机应用》，Vol. 8，No. 1，35—43，1987.

[57] Lighthill, S. J., Pulse Propagation Theory, Mathematical Biofluidynamics, Ch. 12, Regional Conf. Series in Appl. Math., SIAM, Philadelphia, PA, 1975.

[58] 刘楚中，《一类非线性抛物方程的反问题》，《应用数学》，Vol. 2，No. 1，85—94，1989年。

[59] 刘德贵等编，《FORTRAN算法汇编》（第一分册），国防工业出版社，1980年。

[60] Liu, J. Q., Chen, Y. M., An iterative alogrithm for solving inverse

problems of two - dimensional diffusion equations, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 5, 255—269, 1984.

[61] Liu, X. Y., Chen, Y. M, A generalized pulse - spectrum technique for determining time - dependent coefficients of one - dimensional diffusion equations, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 8, 436—445, 1987.

[62] Liu, X. Y., Chen, Y. M., Convergence of a GPST for inverse problems of 1 - D diffusion equations in space - time domain, Math. of Comput., 51, 477—489, 1988.

[63] 吕涛，石济民，林振宝著，《区域分解算法》，科学出版社，1992年。

[64] 陆金甫，关治编，《偏微分方程数值解法》，清华大学出版社，1987年。

[65] Joachimowicz, N., et al, Inverse scattering: an iterative numerical method for electromagnetic imaging, IEEE Trans, AP Vol. 39, No. 12, 1742—1752, 1991.

[66] 罗亮生，《解病态线性方程组的一个新算法及其解精度估计》，《计算数学》，Vol. 12, No. 4, 434—439, 1990.

[67] Keyes, D. E., et al, Fifth international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, Proceedings in Applied Mathematics 55, 1992.

[68] Kirsch, A., et al, Two methods for solving the inverse acoustic scattering problem, Inverse Problems, 4, 749—770, 1988.

[69] Neumann, G., Pierson, W. J., Principles of Physical Oceanography, Prentice - Hall, Englewiid Cliffs, 1966.

[70] Nφrstrud, H., High speed flow past wings, NASA CR - 2246, 1973.

[71] Ohnaka, K., Uosaki, K., Simultaneous identification of the external input and parameters of diffusion type distributed parameter systems, Int. J. Control, Vol. 47, No. 3, 889—895, 1987.

[72] Ohnaka, K., Uosaki, K., Boundary element approach for identification of point forces of distributed parameter systems, Int. J. Control, Vol. 49, No. 1, 119—127, 1989.

[73] Peaceman, D. W., Fundamentals of numerical reservoir simulation, Elsevier Amsterdam, 1977.

[74] Qiu, C. H., Chen, Y. M., Inverse problems for elastic plates with variable flexural rigidity, Int. J. Solids Structures, Vol. 22, No. 8, 901—908, 1986.

[75] Ruberti, (editor), Distributed parameter systems: Modeling and Identification, Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[76] Schaubert, D. H., Mittra, R., A Spectral Domain Method for Remotely Probing Stratified Media, IEEE Trans. AP-25, 261—265, 1977.

[77] Schwarz, H. A., Gesammelete mathematische abhandlungen, Volume 2, Springer, Berlin, 1890. First published in Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich, Vol. 15, 272—286, 1870.

[78] 沈孟育等著,《叶轮机械中的跨音速流动》,科学出版社,1988年。

[79] 沈以读编,《积分方程》,北京理工大学出版社,1992年。

[80] Su, C. W., Yang, J., Inverse Problems of Higher-order Homogeneous Ordinary Differential Equations, ICIAM 91, 2nd International Conference on Industrial and Applied Mathematics, July 8—12, 1991.

[81] Su, C. W., The relation between GPST and optimisation method in inverse problem of partial differential equations, State University of New York, Stony Brook, Research report, 1991.

[82] Su, C. W., A new iterative algorithm for determining diffusion coefficient of two dimensional linear diffusion equation in time domain, State University of New York, Stony Brook, Research report, 1991.

[83] Su, C. W., On GPST and optimisation method in inverse problem of partial differential equations, State University of New York, Stony Brook, Research report, 1991.

[84] Su, C. W., An iterative algorithm for identification of continuous

forces of distributed parameter systmes in time domain, State University of New York, Stony Brook, Research report, 1992.

[85] Su, C. W. An iterative algorithm for determining time-dependent coefficient of two dimensional linear diffusion equation, State University of New York, Stony Brook, Research report, 1992.

[86] Su, C. W, et al, A new iterative numerical algorithm for an inverse scattering problem, ISAF, International Academic Publisher, 716—719, 1993.

[87] 苏超伟,《逆问题的区域分裂算法》,《西北工业大学科技资料》,JCH9324。

[88] 苏超伟,《解决一维线性扩散方程逆问题的一种迭代方法》,《西北工业大学学报》, Vol. 12, No. 1, 84—89, 1994年。

[89] Su, C. W., A domain decomposition method for dete.mining the diffusion coefficient of a two-dimensional linear diffusion equation in the time domain, Appl. Num. Math., 15, 481—493, 1994.

[90] Su, C. W., An iterative algorithm for determining time-dependent coefficient of two dimensional linear wave equation, Annals of Differential Equations, Vol. 11, No. 2, 213—223, 1995.

[91] 苏继超,吴礼义,《积分方程计算翼型的跨音速流》,《航空学报》, Vol. 8, 第3期, 1990年。

[92] Sun, Z., On an inverse boundary value problem in two dimensions, Commun. in Partial Differential Equations, 14 (8&9), 1101—1113, 1989.

[93] Sun, Z., On an inverse conductivity problem in two dimensions, Journal of Differential Equations 87, 227—255, 1990.

[94] Sylvester, J. & Uhlmann, G., A Uniqueness Theorem for an inverse boundary value problem in electrical prospection, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXIX 91—112, 1986.

[95] Sylvester, J. & Uhlmann, G., A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem, Ann. Math. 125, 153—169, 1987.

[96] Tabbara, W., et al, Diffraction tomography: contribution to the analysis of some applications in microwaves and ultrasonics, Inverse Problems, 4, 305—331, 1988.

[97] Takanashi, S., An iterative procedure for three-dimensional transonic wing design by the integral equation method, AIAA-84-2155, 1984.

[98] Takanashi, S., Iterative three-dimensional transonic wing design using integral equations, J. Aircraft, Vol. 22, No. 8, 1985.

[99] Tang, Y. N. et al, Generalized pulse-spectrum technique for 2-D and 2-phase history matching, Appl. Numer. Math., 5, 529—539, 1989.

[100] Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. Y., On the solution of ill-posed problems, John Wiley and Sons, New York, 1977.

[101] Tsien, D. S., Chen, Y. M., A pulse spectrum technique for remote sensing of stratified media, Radio Science 13, 775—783, 1978.

[102] Tsien, D. S., Chen, Y. M., A numerical algorithm for remote sensing of density profiles of a simple ocean model by acoustic pluses, J. Comp. Phys., 25, 366—385, 1977.

[103] 王德明，刘家琦，《求解微分方程反问题的有限元技术》，《应用数学与计算数学学报》，Vol. 2, No. 2, 26—34, 1988年。

[104] Wang, S. L., Chen, Y. M., An efficient numerical method for exterior and interior inverse problems of Helmholtz equation, Wave Motion, 13, 387—399, 1991.

[105] Wang, Y. M., Chew, W. C., An iterative solution of two-dimensional electromagnetic inverse scattering problem, Int. J. Imag. Syst. Tech., Vol. 1, 100—108, 1989.

[106] Weston, V. H., Multifrequency inverse problem for the reduced wave equation with sparse data, J. Math. Phys., 25, 1382—1390, 1984.

[107] Weston, V. H., Multifrequency inverse problem for the reduced wave equation: resolution cell and stability, J. Math. Phys., 25,

3483—3488, 1984.

[108] Xie, G. Q., A new iterative method for solving the coefficient inverse problem of the wave equation, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXIX 307—322, 1986.

[109] Xie, G. Q., Chen, Y. M., A modified pulse-spectrum tehnique for solving inverse problems of two-dimensional elastic wave equation Appl. Numer. Math., 1, 217—237, 1985.

[110] 杨年钧等编译,《数学物理方程》,辽宁科学技术出版社,1985年。

[111] 袁益让,《二维强化采油的数值方法和分析》,《应用数学学报》,Vol. 15, No. 2, 269—284, 1992年。

[112] 袁忠信,《一类非线性色散型发展方程的逆问题》,《应用数学》,Vol. 14, No. 2, 174—179, 1991年。

[113] 张铁,《解一类抛物方程反问题的数值方法》,《应用数学》,Vol. 5, No. 2, 96—102, 1992年。

[114] 赵金熙,《解病态线性方程组的一类直接方法》,《高等学校计算数学学报》,Vol. 10, No. 3, 250—262, 1988年。

[115] Zhu, J. P. and Chen, Y. M., Multilevel grid method for history matching multi-dimensional multiphase reservoir models, Appl. Num. Math., 10, 159—174, 1992.

[116] Zhu, J. P. and Chen, Y. M., Parameter estimation for multiphase reservoir models on hypercubes, Impact of Computing in Sci. and Eng., 4, 97—123, 1992.

[117] Zhu, J. P. and Chen, Y. M., History matching for multiphase reservoir models on shared memory supercomputers, International J. Supercomputer Applications, 6, 193—206, 1992.

[118] Zhu, J. P., On the application of the GPST algorithm to history matching multiphase reservoir models, Ph. D. dessertation, State University of New York, Stony Brook, 1990.

[119] 朱自强,夏智勋,吴礼义,《跨音速翼型和机翼的反设计计算方法》,《航空科学基金论文集》(1), 22—32, 1992年。

[General Information]
书名=偏微分方程逆问题的数值方法及其应用
作者=苏超伟著
页数=212
SS号=11105181
DX号=
出版日期=1995年10月第1版
出版社=西北工业大学出版社